

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ПНИПУ)

На правах рукописи

Фукалов Антон Александрович



Задачи о равновесии  
упругих трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел:  
аналитические решения и их приложения

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:  
Заслуженный деятель науки РФ, доктор  
физико-математических наук, профессор  
Соколкин Юрий Викторович;  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Алексей Вячеславович Зайцев

Пермь – 2022

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>ГЛАВА 1. РАВНОВЕСИЕ ТЯЖЕЛЫХ УПРУГИХ ТРАНСВЕСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ЦЕНТРАЛЬНО- СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ .....</b>	<b>19</b>
1.1. Аналитическое решение задачи о равновесии тяжелой упругой анизотропной сферы.....	19
1.2. Равновесие тяжелой упругой трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внешней поверхностью, находящейся под действием равномерного внутреннего давления.....	27
1.3. Численные решения задачи о равновесии тяжелой упругой трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внешней поверхностью в пакетах ANSYS и ABAQUS .....	35
1.4. Равновесие тяжелой упругой трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью, находящейся под действием равномерного внешнего давления .....	42
1.5. Основные результаты и выводы главы.....	49
<b>ГЛАВА 2. РАВНОВЕСИЕ ТЯЖЕЛЫХ УПРУГИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СОСТАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ.....</b>	<b>50</b>
2.1. Аналитическое решение задачи о равновесии составной упругой трансверсально-изотропной сферы при действии массовых сил .....	50
2.2. Равновесие тяжелой упругой составной трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внешней поверхностью .....	56
2.3. Равновесие тяжелой упругой составной трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью .....	60

2.4. Многокритериальная оценка прочности монолитных железобетонных крепей сферических горных выработок, находящихся в массиве осадочных или сыпучих пород .....	62
2.5. Основные результаты и выводы главы.....	73
<b>ГЛАВА 3. РАВНОВЕСИЕ УПРУГИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ИЗОТРОПНЫХ СОСТАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНО- СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ .....</b>	<b>74</b>
3.1. Аналитическое решение задачи о равновесии упругой составной анизотропной сферы нагруженной внутренним и внешним давлением .....	74
3.2. Влияние параметров анизотропии на напряженное состояние упругих составных сферических сосудов, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления.....	78
3.3. Определение эффективных упругих модулей дисперсно-упрочненного композита со сплошными и полыми анизотропными сферическими включениями .....	84
3.4. Основные результаты и выводы главы.....	93
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>94</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>97</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность и степень разработанности темы.** В различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на предприятиях аэрокосмического и нефте-газо-химического комплексов находят применение разнообразные элементы конструкций и сооружений в виде массивных толстостенных сфер, изготавливаемых из анизотропных материалов, весом которых нельзя пренебречь. Наиболее типичными примерами таких конструкций являются монолитные крепи сферических горных выработок, контейнеры для длительного хранения и транспортировки высокоагрессивных и реакционно-способных твердых и жидких сред, а также отдельные узлы авиационной и ракетно-космической техники, которые подвергаются действию статического или изменяющегося во времени внешнего и/или внутреннего давления и собственного веса. Проблемы определения напряженного состояния, оптимального проектирования и оценки прочности конструкций и сооружений ответственного назначения, перечисленных выше, принадлежат к числу **актуальных** задач механики деформируемого твердого тела, геомеханики, строительной механики, экспериментальной и вычислительной механики и других областях.

При сооружении сферических горных выработок подкрепление является одним из основных производственных процессов, без которого невозможна их эксплуатация. Крепи, предназначенные для обеспечения безопасности труда, сохранности находящегося внутри сырья и оборудования, как правило, изготавливаются из железобетона – анизотропного материала, весом которого нельзя пренебречь. Поэтому актуальной и практически значимой задачей является анализ вклада массовых сил в напряженное состояние железобетонных монолитных крепей сферических подземных выработок – сооружений используемых для длительного хранения высокоагрессивных и реакционно-способных веществ.

Поскольку композиционные материалы, железобетон и горные породы имеют ярко выраженную анизотропию свойств, вызванную наличием волокон, стержневых армирующих элементов и минеральных включений, то прочностной анализ элементов конструкций и сооружений, изготовленных из этих материалов, необходимо осуществлять на основе многокритериального подхода [1, 2], рассматривая различные характерные для анизотропных материалов механизмы частичного или полного исчерпания несущей способности.

Введенные в работе [3] независимые величины для тензора напряжений

$$J^I = (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta})/2, \quad J^{II} = \sigma_{\rho\rho},$$

$$J^{III} = \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{\varphi\theta}^2}, \quad J^{IV} = \sqrt{\sigma_{\varphi\rho}^2 + \sigma_{\theta\rho}^2}$$

и для тензора деформаций

$$j_\varepsilon^I = \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}, \quad j_\varepsilon^{II} = \varepsilon_{\rho\rho},$$

$$j_\varepsilon^{III} = \sqrt{(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\theta\theta})^2 + 4\gamma_{\varphi\theta}^2}, \quad j_\varepsilon^{IV} = \sqrt{\gamma_{\varphi\rho}^2 + \gamma_{\theta\rho}^2},$$

инвариантны относительно ортогональных преобразований, допустимых над сферически трансверсально-изотропным однородным телом. На основе этих независимых инвариантов и прочностных постоянных  $J_{Cr}^I$ ,  $J_{Cr}^{II}$ ,  $J_{Cr}^{III}$  и  $J_{Cr}^{IV}$  определяемых экспериментально, в работах [1, 2] были сформулированы критериальные условия в виде неравенств, позволяющие описать разрушение по различным механизмам, которые характерны для анизотропных материалов. Так, например, при выполнении неравенства  $J^I \geq J_{Cr}^I$  или  $J^{II} \geq J_{Cr}^{II}$  реализуются механизмы разрушения от растяжения или сжатия в окружном и меридиональном направлении или в направлении радиальной координаты. Если выполняются неравенства  $J^{III} \geq J_{Cr}^{III}$  или  $J^{IV} \geq J_{Cr}^{IV}$ , то реализуются механизмы разрушения от сдвига по поверхности изотропии или межслойного антиплоского сдвига.

Проблемы, связанные с исследованием различных аспектов равновесия изотропных тел сферической формы хорошо изучены в литературе [4–39]. Впервые задача о равновесии упругой изотропной сферы (сплошной и полый) была рассмотрена G. Lamé [4, 5]. В его работах решение построено в сферических

координатах, компоненты вектора перемещений (который удовлетворяет уравнениям равновесия в перемещениях) определялось в форме рядов по произведениям присоединенных функций Лежандра и тригонометрических функций. С. П. Тимошенко в своей работе по истории механики [40] указывает на более раннюю работу G. Lamé и В. Р. Е. Clapeyron (*Memoires presentes par divers savants*, 1833. Vol. 4), в которой были представлены решения задач о равновесии сферы в радиальном гравитационном поле (направленные к ее центру силы тяжести) и сферической оболочки, нагруженной равномерно распределенным внутренним или наружным давлением. Однако эти решения были получены до обоснования S. D. Poisson необходимости введения в уравнения теории упругости модуля поперечной деформации. Поэтому во всех уравнениях присутствовала лишь одна упругая постоянная.

Полное решение для полой толстостенной сферической оболочки и сплошной сферы при заданных напряжениях или смещениях на поверхности было получено W. Tomson (лорд Кельвин) [6] при помощи сферических функций декартовых координат. W. Tomson стремился использовать эти результаты для определения жесткости Земли. В дальнейшем эти решения положили начало развития многочисленных приложений теории упругости к задачам геофизики и другим проблемам космической физики, которым посвящено большое количество работ, процитированных в курсе А. Е. Н. Love [7]. Кроме того, используя метод W. Tomson, было получено решение задачи о равновесии упругой сплошной сферы.

Задача о равновесии упругой сферы была также рассмотрена в работах А. И. Лурье, О. Tedone, С. Somigliana и V. Cherruti, многочисленные ссылки на которые содержатся в монографиях [8, 9]. Кроме этого, в этих монографиях содержатся решения ряда краевых задач для сплошной и полой изотропной упругой сферы при заданных на границах перемещениях или усилиях, полученные методом W. Tomson с использованием представления П. Ф. Папковича [10] для составляющих тензора напряжений через гармонические функции.

Симметрично нагруженная упругая сфера рассмотрена в монографиях и статьях [8, 9, 11–15], а также в работах С. Weber, Е. Sternberg, F. Rosental и

G. Fichera, ссылки на которые даны в [9]. Помимо перечисления частных решений для полых симметрично нагруженной сферы в работе [11] построен класс решений задач о равновесии упругого тела, ограниченного двумя концентрическими сферами и срезами по коническим поверхностям с вершинами в центре сферы.

Работы R. Southwell, R. A. Enbancs, V. E. Sternberg, J. Larmour, M. Sadowsky, М. Т. Алимжанова, Ф. Ф. Губина, А. В. Кривоченко, Г. Н. Савина, А. Н. Спорыхина, Н. А. Стрельчука, Г. Л. Хесина, А. С. Чеботарёва, А. И. Шашкина и др. [16–24] посвящены решению задач по определению напряженного состояния в окрестности сферической полости. Задачи теплопроводности и термоупругости для сплошных и полых сферических тел рассмотрены в статьях [25–27]. В работе [28] представлены результаты исследования процесса симметричного деформирования шара при воздействии гравитационных и электростатических сил. Неупругое поведение изотропных тел сферической формы изучается в статьях и монографиях [22–24, 29–31], в том числе, в качестве приложений к задачам геомеханики породных сред, конструкций и сооружений [22–24].

Большое количество монографий и статей посвящены анализу поведения конструкций и сооружений, имеющих форму полых толстостенных сфер, при воздействии на них внешнего и/или внутреннего давления. Проблеме исследования напряженно-деформированного состояния сферических тел от действия массовых сил посвящены работы Г. Б. Кузнецова, Л. Л. Кожевниковой, В. П. Матвеевко, А. А. Рогового и И. Н. Шардакова [32–34]. В этих работах содержатся решения частных задач по оценке влияния гравитационных сил на характер распределения напряжений и деформаций в тяжелых сферах, а также в составных толстостенных центрально-симметричных изотропных телах, находящихся под действием массовых сил.

Массивные центрально-симметричные конструкции и постепенно возводимые строительные и подземные геологические сооружения по способу их изготовления (аддитивные технологии, непрерывная послойная намотка предварительно пропитанными волокнами или лентами ткани, послойная выкладка, послойное наплавление, осаждение из газовой или жидкой фазы и т.п.) могут быть

классифицированы, как растущие тела. В качестве механической нагрузки для этих тел выступают постепенно увеличивающиеся массовые и поверхностные силы, которые задаются на изменяющейся в процессе роста поверхности. Кроме того, в процессе создания растущего тела возникают внутренние технологические напряжения, связанные не только с постепенным наращиванием тела, но и с особенностями технологии изготовления (предварительное натяжение нитей и лент ткани, усадка при отверждении, прессование и т.п.).

Массивные конструкции не создаются мгновенно, поэтому для них важно учитывать постепенное нарастание массы в процессе производства. Важность анализа напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений, которые могут быть отнесены к растущим телам, предопределила формирование и развитие Н. Х. Арутюняном, А. В. Манжировым, Д. А. Паршиным, С. А. Лычевым и их учениками нового научного направления — механики растущих тел [27, 35–39]. В рамках созданных математических основ которого, в том числе, получены решения задач для сферических тел в упругой постановке и для вязкоупругих стареющих изотропных материалов [27, 38, 39].

В диссертационной работе предполагается, что элементы конструкций и сооружений в виде полых и составных толстостенных упругих сфер уже созданы (процесс производства не рассматривается), находятся в равновесии под действием гравитационных сил и демонстрируют при заданных центрально- и осесимметричных нагрузках малые изменения объема и формы.

Несмотря на то, что конструкционные материалы, используемые при изготовлении сооружений, имеют ярко выраженную анизотропию деформационных и прочностных свойств, большинство авторов ограничиваются лишь частным случаем, когда справедливо предположение об изотропии. Решение задачи о равновесии упругой анизотропной полый сферы, приведенное в монографии С.Г. Лехницкого [41], было впервые получено В. Saint-Venant [42] в 1865 г. Кроме того, равновесие анизотропной сферы рассматривается также в работе [43]. В статье [44] получено решение задачи о центрально-симметричной деформации полого шара из упругого радиально неоднородного трансверсально-изотропного материала, с помощью которого установлено наличие эффектов, вызванных



неоднородностью, и проведено их качественное исследование. Аналитическое исследование [45] посвящено изучению магнито-электро-термоупругого поведения трансверсально-изотропной пьезоэлектрической полой сферы, помещенной в однородное магнитное поле и подверженной произвольному тепловому удару.

Теоретически и практически важными для многих приложений являются задачи для неоднородных сред со сферическими включениями, которые рассматривались в работах J. D. Eshelby, Z. Hashin, T. Mura, R. M. Christensen, P. J. Withers, Р. В. Гольдштейна и К. Б. Устинова с соавторами, С. К. Канауна и В. М. Левина, В. С. Зарубина и Г. Н. Кувыркина с соавторами, Ю. В. Соколкина, А. А. Ташкинова и А. А. Панькова, М. Л. Качанова и И. Б. Севостьянова с соавторами, С. А. Лурье, Д. Б. Волкова-Богородского, Ю. О. Соляева, с соавторами [46–65]. На основе полученных решений (в классических и градиентных постановках) были проведены исследования искажений поля напряжений в изотропных и анизотропных непрерывных фазах, вызванные наличием различных включений, а также получены оценки эффективных упругих свойств дисперсно-наполненных материалов.

Статьи Е. Н. Вильчевской, Н. Ф. Морозова и А. Б. Фрейдина [66, 67] посвящены решению центрально-симметричных задач механохимии. Авторами установлена взаимосвязь между напряженным состоянием и скоростью химических реакций в сфере, в теле со сферическим отверстием и в сферическом включении, помещенном в бесконечную среду.

В связи с развитием и доступностью вычислительной техники большую популярность при решении задач механики деформируемого твердого тела, возникающих при оценке прочности элементов конструкций, получили численные методы. Для успешного применения численных методов требуется определенный критерий оценки правильности составленного алгоритма, и как следствие, полученных с помощью него решений. Таким критерием может быть сравнение результатов численных экспериментов с решением тестовых задач, имеющих аналитическое решение.

Кроме того, получаемые аналитические решения позволяют установить и проиллюстрировать качественные эффекты, вызванные предельными переходами

(геометрия, соотношение деформационных свойств и т.п.). В отличие от численных или численно-аналитических методов, применение которых не может гарантировать полноту проводимых исследований для выявления экстремальных и предельных случаев, аналитические решения не требуют больших объемов вычислений и, при этом, позволяют выявить характерные закономерности в поведении полей напряжений и деформаций в фазах, закономерности деформирования элементов конструкций, а также пределы применимости используемых гипотез.

Конструкции и сооружения создаются, как правило, одновременно с материалом, из которого они изготовлены. Поэтому получение новых аналитических решений задач о равновесии тяжелых центрально-симметричных тел также важно и **актуально** для отработки методик экспериментов по идентификации материальных постоянных и функций анизотропных материалов с целью расширения базы определяющих соотношений.

**Цели и задачи.** Целью диссертационной работы является получение новых аналитических решений задач о равновесии упругих трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел.

Несмотря на важность учета постепенного нарастания массы тяжелых тел [27, 35–39], будем предполагать, что элементы конструкций и сооружения уже существуют. Поэтому задачи построения моделей роста тяжелых сферических тел останутся за рамками проводимого исследования. Будем рассматривать задачи равновесия элементов конструкций и сооружений, имеющих форму полых и составных толстостенных сфер, изготовленных из линейно упругих трансверсально-изотропных материалов, находящихся под действием центрально- и осесимметричных нагрузок, в приближении малых деформаций.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

- получение аналитических решений задач о равновесии тяжелых полых и составных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной или закрепленной в радиальном направлении (с идеальным скольжением без трения) внешней или внутренней поверхностью соответственно; определение вклада массовых сил

в распределение независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях;

- получение аналитических решений задач о равновесии составных толстостенных тел, состоящих из двух посаженных с натягом упругих трансверсально-изотропных сфер с общим центром и нагруженных внешним и внутренним равномерными давлениями;

- выявления закономерностей совместного деформирования крепи сферической подземной выработки и окружающего массива осадочных пород, а также внутренней и внешней частей составных сосудов давления; определения влияния параметров анизотропии материала на характер распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях; оценки исчерпания несущей способности по совокупности критериев, учитывающих различные механизмы разрушения, характерные для трансверсально-изотропных материалов;

- прогнозирования в рамках полидисперсных моделей механики композитов эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных материалов, изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения.

**Научная новизна** диссертационной работы состоит в следующем:

- получены новые аналитические решения задач о равновесии полых и составных толстостенных упругих трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел, находящихся под действием массовых сил и равномерного внутреннего или внешнего давления, при условии задания на внешней или внутренней поверхности жесткого закрепления или ограничения на перемещения в радиальном направлении с идеальным скольжением без трения;

- получены новые аналитические решения задач о равновесии составных толстостенных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием внутреннего и внешнего равномерного давления;

- выведены в рамках полидисперсных моделей аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов с однородно распределенными трансверсально-изотропными сплошными или полыми сферическими включениями в изотропной матрице;

- с помощью полученных решений выполнен анализ влияния параметров анизотропии и массовых сил на закономерности напряженно-деформированного состояния полых и составных трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел, проведена многокритериальная оценка прочности монолитных крепей сферических горных выработок и составных сферических сосудов давления.

Необходимо также отметить, что в отечественной и зарубежной литературе отсутствуют научные монографии и статьи, посвященные задачам исследования напряженно-деформированного состояния полых и составных анизотропных толстостенных сферических тел, находящихся под действием гравитационных сил, внешнего и внутреннего давления. Кроме того, не изучен вопрос влияния анизотропии армирующего наполнителя на эффективные упругие модули композиционных материалов. Это является дополнительным подтверждением **научной новизны и актуальности** полученных результатов.

**Теоретическая и практическая значимость.** Полученные новые аналитические решения могут быть использованы для описания процессов деформирования постепенно создаваемых (методами аддитивной непрерывной послойной намотки предварительно пропитанными волокнами или лентами ткани; методами послойной выкладки, послойного наплавления, послойного осаждения из газовой или жидкой фазы) трансверсально-изотропных сферических элементов конструкций и постепенно возводимых строительных и подземных геологических сооружений; могут рассматриваться в качестве эталонов для тестирования алгоритмов решения краевых задач численными методами, могут быть полезны исследователям при отработке методик натуральных экспериментов со сферическими тяжелыми телами (в том числе для идентификации материальных констант и функций анизотропных сред, создающихся совместно с конструкциями, в которых они используются). Полученные новые аналитические решения позволяют также определять напряженно-деформированное состояние, проводить оптимальное проектирование и получать оценки прочности сферических конструкций и сооружений ответственного назначения, используемых в различных отраслях машиностроения, горном деле, строительной механике и других областях. Полученные результаты, иллюстрирующие возможную реализацию механизмов

исчерпания несущей способности сосудов давления и железобетонных монолитных крепей сферических подземных выработок и окружающего породного массива от растяжения или сжатия в меридиональном или радиальном направлении, разрушения по механизму межслойного сдвига, могут быть полезны при проектировании систем мониторинга геологических сооружений и тяжелых сферических конструкций.

**Положения, выносимые на защиту:**

- новые аналитические решения задач о равновесии полых и составных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной внешней или внутренней поверхностью соответственно;

- новые аналитические решения задач о равновесии составных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с радиально закрепленными внешней или внутренней поверхностями, на которых реализуются условия идеального скольжения без трения;

- новые аналитические решения задач о равновесии находящихся под действием внешнего и внутреннего равномерных давлений составных толстостенных тел, состоящих из двух посаженных с натягом упругих трансверсально-изотропных сфер с общим центром;

- полученные в рамках полидисперсных моделей механики аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов, изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения;

- результаты многокритериальной оценки прочности монолитных крепей сферических горных выработок, выполненной с учетом влияния окружающего массива осадочных пород, и составных сферических сосудов давления.

**Методология и методы диссертационного исследования.** Аналитические решения задач получены в рамках гипотез и ограничений классической теории упругости методом разложения компонент вектора перемещений в ряды по полиномам Лежандра по меридиональной координате.

Коэффициенты разложений найдены в виде линейных комбинаций степенных функций радиальной координаты.

**Степень достоверности результатов и выводов.** Достоверность подтверждается корректным использованием аппарата математической теории упругости, численных методов решения задач механики деформируемого твердого тела (метод конечных элементов), аналитических методов прогнозирования эффективных упругих модулей дисперсно-упрочненных композитов матричного типа (в рамках полидисперсных моделей), методов решения краевых задач математической физики и корректным сравнением частных случаев полученных аналитических решений с аналитическими, численными и экспериментальными результатами других авторов.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 112 страницах, содержит 19 рисунков и 2 таблицы, список литературы представлен 125 источниками.

Во **введении** представлен краткий обзор, отражающий современное состояние вопросов исследования, сделано заключение о научной новизне и актуальности темы, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, новые научные результаты и положения, выносимые на защиту; описаны методология и методы диссертационного исследования, приведено краткое описание содержания диссертации по главам.

В **первой главе** представлены уравнения теории упругости в сферических координатах и получено (благодаря обобщению методов и подходов [32]) новое аналитическое решение задачи о равновесии тяжелых трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел с граничными условиями, обладающими симметрией относительно диаметральной вертикальной оси. Представлены новые аналитические решения ряда задач о равновесии жестко закрепленных на внешней или внутренней поверхности толстостенных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и равномерного внутреннего или внешнего давления. Определены перемещения, напряжения и деформации в точках поперечных сечений толстостенных сфер. Проиллюстрировано приложение

полученных решений для оценки прочности монолитных железобетонных крепей сферических подземных выработок по совокупности критериев.

Во **второй главе** получены новые аналитические решения задач о равновесии упругих трансверсально-изотропных составных тяжелых сфер, нагруженных равномерным внутренним или внешним давлениями при условии полного (в радиальном и меридиональном направлении) и частичного (только вдоль радиальной координаты) закрепления внешней или внутренней поверхности. Проанализированы закономерности совместного деформирования, проведена оценка вклада массовых сил в распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях монолитных крепей сферических подземных горных выработок, а также в окружающем массиве осадочных пород и сыпучих геосред; проведена оценка прочности по совокупности критериев; определены области, где возможно инициирование разрушения по различным механизмам, характерным для сферически анизотропных материалов.

**Третья глава** посвящена получению новых аналитических решений задач о равновесии толстостенных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений. Проанализировано влияние показателя анизотропии материала на характер распределения напряжений в поперечных сечениях составных центрально-симметричных сосудов давления. Представлены результаты прогнозирования эффективных упругих свойств дисперсно-упрочненных композитов со сплошными и полыми анизотропными сферическими включениями.

В **заключении** сформулированы итоги выполненных исследований, основные результаты диссертационной работы и рекомендации их практического применения; показаны перспективы дальнейшей разработки темы диссертации.

**Апробация.** Основные положения и результаты представленные в диссертации докладывались и обсуждались на X и XI Всероссийских съездах по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011 г. и Казань, 2015 г.); 8 Европейской конференции по механике твердого тела (Грац, Австрия, 2012 г.); 38 и 39 международных конференциях по механике деформируемого твердого тела (Варшава, 2012 г. и Закопане, 2014 г.,

Польша); XXXVI и XXXVIII – XL Международных летних школах-конференциях «Актуальные проблемы механики» (Санкт-Петербург, 2008, 2010, 2011 и 2012 гг.); II и V Международных конференциях «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Дилижан, 2010 г. и Цахкадзор, 2017 г., Армения); XXVII Международной конференции «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций», (Санкт-Петербург, 2017 г.); X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017 г.), XXXVI–XXXVIII Международных молодежных научных конференциях «Гагаринские чтения» (Москва, 2010–2012 гг.); XVI–XX Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2009, 2011, 2013, 2015 и 2017 гг.); Всероссийских научно-технических конференциях «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации» (Пермь, 2009, 2011 и 2013 гг.); Всероссийских школах-конференциях молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2008–2012, 2015 и 2016 гг.); VI Российской научно-технической конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (Екатеринбург, 2010 г.); IX и X Международных конференциях «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2014 и 2016 гг.); Всероссийской конференции «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», посвященной 90-летию со дня рождения академика И. Ф. Образцова (Москва, 2010 г.); 5, 9 и 10 Всероссийских научных конференциях с международным участием им. И. Ф. Образцова и Ю. Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (Москва, 2015, 2019 и 2020 гг.); XVIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2016 г.); Всероссийской конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем» (Москва, 2011 г.); VII Всероссийской конференции молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (Новосибирск, 2009 г.); 1 и 5 международных научных конференциях-школах молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» (Москва, 2015 и 2019 гг.).

Результаты диссертационной работы получены в рамках исследований, проводимых на кафедре «Механика композиционных материалов и конструкций»



ПНИПУ с участием автора в рамках задания № 2014/152 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности (базовая часть госзадания Минобрнауки РФ, код проекта – 1911), государственного задания Минобрнауки РФ FSNM–2020–0027 на выполнение фундаментальных научных исследований на 2020 г. и плановый период 2021 и 2022 гг., грантов Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ–Урал № 07–01–96056, № 11–01–96033, № 14–01–96029, № 16–41–590396, № 17–41–590148 и № 19–41–590026, РФФИ № 11–01–00910, 14–01–00726 и 15–01–08678).

**Публикации.** Научные результаты диссертационной работы опубликованы в 49 работах [68–116], включая 4 статьи в журналах, входящих в базы цитирования Web of Science Core Collection; 2 статьи в журналах, входящих в базы цитирования Scopus; 3 статьи в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ [68–76]; в 25 статьях в материалах и тезисах докладов Всероссийских и международных конференций и монографии [77].

**Личный вклад автора** заключается в следующем:

- обобщен разработанный ранее [32–34] аналитический метод определения перемещений, деформаций и напряжений в толстостенных жестко закрепленных изотропных сферах, находящихся под действием массовых сил, на случай решения задач о равновесии трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел, находящихся под действием произвольных осесимметричных нагрузок, разложимых в ряды по полиномам Лежандра;
- получены новые аналитические решения задач о равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сферических тел, находящихся под действием внешнего и внутреннего равномерных давлений. Проанализированы закономерности влияния анизотропии материалов внутренней и внешней сфер и величины давления натяга на распределение напряжений в поперечных сечениях составных центрально-симметричных сосудов давления;
- получены новые аналитические решения задач о равновесии толстостенных полых и составных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с заданным на внешней или внутренней поверхности жестким закреплением или радиальным закреплением с возможностью идеального скольжения без трения.

- на основе многокритериального подхода к оценке прочности определены области монолитной анизотропной крепи сферической горной выработки, в которых может быть инициировано разрушение по различным механизмам, характерным для трансверсально-изотропной среды. Проведена оценка влияния окружающего массива осадочных пород на характер распределения напряжений в монолитной крепи;

- выведены аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов, изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения, полученные в рамках полидисперсной модели механики. Спрогнозированы эффективные модули объемного сжатия полимербетонов, показано влияние состава полимерной матрицы и типа минерального наполнителя на их эффективные деформационные свойства.

Направление исследования, его цель и постановки задач были сформулированы совместно с научными руководителями, с которыми обсуждались все полученные новые научные результаты и готовились к публикации статьи на их основе.

Автор выражает признательность Заслуженному деятелю науки РФ, д.ф.-м.н., профессору Ю. В. Соколкину, доценту кафедры «Механика композиционных материалов и конструкций» ПНИПУ к.ф.-м.н. А. В. Зайцеву и главному научному сотруднику ИМСС УрО РАН, д.ф.-м.н., профессору И. Н. Шардакову, за постоянное внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

# ГЛАВА 1. РАВНОВЕСИЕ ТЯЖЕЛЫХ УПРУГИХ ТРАНСВЕСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ЦЕНТРАЛЬНО- СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

В главе приведены основные уравнения механики упругих центрально-симметричных тел в сферических координатах и получено общее решение задачи о равновесии упругой тяжелой трансверсально-изотропной сферы. Представлены новые аналитические решения задач о равновесии упругих трансверсально-изотропных сфер, закрепленных на внешней или внутренней поверхности и находящихся под действием массовых сил, равномерного внутреннего или внешнего давления. Проиллюстрирована возможность применения полученных решений для определения напряженно-деформированного состояния, многокритериальной оценки прочности монолитных железобетонных крепей сферических подземных выработок, которые используются для длительного хранения высокоагрессивных и реакционно-способных твердых и жидких сред, газо- и нефтепродуктов.

## 1.1. Аналитическое решение задачи о равновесии тяжелой упругой анизотропной сферы

Полная система уравнений теории упругости, записанная в сферических ортогональных координатах, включает в себя геометрические соотношения Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho\rho} &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{\rho} \operatorname{ctg}\theta + \frac{u_\rho}{\rho}, \\ \gamma_{\rho\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}, \quad \gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg}\theta \right) + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho},\end{aligned}\tag{1.1}$$

уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) + F_{\rho} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}] + F_{\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\varphi}) + F_{\varphi} = 0$$

и определяющие соотношения:

$$\sigma_{\rho\rho} = A_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{12}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{\rho\rho} = A_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{12}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}(A_{22} - A_{23})\gamma_{\theta\varphi},$$

$$\tau_{\rho\varphi} = A_{44}\gamma_{\rho\varphi}, \quad \tau_{\rho\theta} = A_{44}\gamma_{\rho\theta},$$

которые для трансверсально-изотропного тела можно записать с помощью технических постоянных:

$$A_{11} = \frac{\tilde{E}(1-\nu)}{m}, \quad A_{12} = \frac{E\tilde{\nu}}{m}, \quad A_{23} = \frac{E}{(1+\nu)m} \left( \nu + \tilde{\nu}^2 \frac{E}{\tilde{E}} \right), \quad (1.4)$$

$$A_{22} = \frac{E}{(1+\nu)m} \left( 1 - \tilde{\nu}^2 \frac{E}{\tilde{E}} \right), \quad A_{44} = \tilde{G}, \quad m = 1 - \nu - 2\tilde{\nu}^2 \frac{E}{\tilde{E}}.$$

Здесь  $\tilde{E}$  и  $E$  — модули Юнга для растяжения вдоль  $\rho$  и в ортогональном к нему направлении;  $\tilde{G}$  — модуль сдвига для диаметральной плоскости;  $\tilde{\nu}$  и  $\nu$  — коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение тела в направлениях  $\theta$  и  $\varphi$  при растяжении вдоль радиальной координаты  $\rho$ , и поперечные деформации в плоскости нормальной радиус-вектору  $\rho$  при растяжении в той же самой плоскости соответственно.  $\sigma_{ii}$  и  $\varepsilon_{ii}$  (по  $i$  не суммировать) — нормальные компоненты тензора напряжений и осевые деформации,  $\tau_{ij}$  и  $\gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) — касательные компоненты тензора напряжений и углы сдвига, а  $F_{\rho}$ ,  $F_{\theta}$ ,  $F_{\varphi}$  — компоненты вектора массовых сил.

Рассмотрим линейно-упругое тело — толстостенную сферу, ограниченную поверхностями с радиусами  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ), находящуюся в состоянии равновесия под действием собственного веса. В центр поместим начало сферической ортогональной системы координат  $\rho, \theta, \varphi$ . Будем считать, что материал сферы однородный, с постоянной плотностью по всему объему, сферически трансверсально-изотропный, относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра в данную точку. Так как на центрально-симметричное тело действует нагрузка симметричная относительно вертикальной оси, проходящей через его геометрический центр, то компоненты вектора перемещения, напряжения и деформации не зависят от окружной координаты. Поэтому система (1.1)–(1.3) значительно упрощается: определяющие соотношения остаются неизменными (1.3), из шести геометрических соотношений Коши остаются лишь четыре:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_\theta}{\rho} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}, \quad (1.5)$$

а из трех уравнений равновесия (1.2) — два:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) + F_\rho = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}] + F_\theta = 0.$$

Здесь  $F_\rho = -\gamma \cos \theta$  и  $F_\theta = \gamma \sin \theta$  — компоненты вектора массовых сил, зависящие от удельного веса материала  $\gamma$ .

Дадим следующее **определение**. Будем называть тело тяжелым в случае, если величины  $F_\rho$  и  $F_\theta$  имеют один порядок с остальными слагаемыми уравнений (1.6) и, как следствие, при описании механического поведения возникает необходимость учета массовых сил.

В силу малости деформаций будем предполагать, что тип упругой симметрии материала сферы не изменяется в процессе приложения нагрузки.

При последовательной подстановке геометрических соотношений (1.5) в определяющие (1.3), а затем полученного результата — в уравнения равновесия

(1.6), получим неоднородную систему дифференциальных уравнений Ламе в частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left[ 2A_{11} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + (A_{12} + A_{44}) \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \theta \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{\rho^2} \left[ A_{44} \left( \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + (A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44}) \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 2(A_{12} - A_{22} - A_{23})u_\rho \right] = \gamma \cos \theta, \\
 & A_{44} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left[ 2A_{44} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + (A_{12} + A_{44}) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \theta} \right] + \frac{1}{\rho^2} \left[ A_{22} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (A_{22} + A_{23} + 2A_{44}) \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - (A_{23} + 2A_{44} + A_{22} \operatorname{ctg}^2 \theta) u_\theta \right] = -\gamma \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Предположим, что на внешнюю и внутреннюю поверхности сферы действует нагрузка или задано перемещение, симметричное относительно вертикальной оси, проходящей через геометрический центр. В силу осевой симметрии нагрузки и центральной симметрии конструкции, решение системы дифференциальных уравнений (1.7), можно представить в виде рядов [4, 5, 7, 117]:

$$u_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\rho n}(\rho) P_n(\cos \theta), \quad u_\theta = -\sum_{n=0}^{\infty} u_{\theta n}(\rho) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}. \tag{1.8}$$

Здесь  $P_n(\cos \theta)$  — полином Лежандра.

Подставляя выражения (1.8) в систему (1.7) и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях аргумента  $\theta$ , получим  $n$  систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & a_{1n} u_{\rho n}'' + a_{2n} \frac{1}{\rho} u_{\rho n}' + a_{3n} \frac{1}{\rho^2} u_{\rho n} + a_{4n} \frac{1}{\rho} u_{\theta n}' + a_{5n} \frac{1}{\rho^2} u_{\theta n} = A_n, \\
 & b_{1n} u_{\theta n}'' + b_{2n} \frac{1}{\rho} u_{\theta n}' + b_{3n} \frac{1}{\rho^2} u_{\theta n} + b_{4n} \frac{1}{\rho} u_{\rho n}' + b_{5n} \frac{1}{\rho^2} u_{\rho n} = B_n,
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Коэффициенты, входящие в (1.9) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & a_{1n} = A_{11}, \quad a_{2n} = 2A_{11}, \quad a_{3n} = 2(A_{12} - A_{22} - A_{23}) - A_{44}(n^2 + n), \\
 & a_{4n} = (A_{12} + A_{44})(n^2 + n), \quad a_{5n} = (A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44})(n^2 + n),
 \end{aligned}$$

$$b_{1n} = A_{44}, \quad b_{2n} = 2A_{44}, \quad b_{3n} = -A_{23} - 2A_{44} - A_{22}(n^2 + n - 1), \quad b_{4n} = -(A_{12} + A_{44}),$$

$$b_{5n} = -(A_{22} + A_{23} + 2A_{44}), \quad A_n = \begin{cases} \gamma, & n=1, \\ 0, & n=0, n>1; \end{cases} \quad B_n = \begin{cases} -\gamma, & n=1, \\ 0, & n=0, n>1. \end{cases}$$

Тогда решение задачи по определению перемещений в точках толстостенной анизотропной линейно упругой сферы, находящейся под действием гравитационных сил, можно представить в виде суперпозиции:

$$u_\rho = u_{\rho_0} + u_{\rho_1} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} u_{\rho_n} P_n(\cos \theta), \quad u_\theta = u_{\theta_1} \sin \theta - \sum_{n=2}^{\infty} u_{\theta_n} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},$$

Коэффициенты-множители при тригонометрических функциях определяются из решения  $n$  самостоятельных задач.

Заданные на границах тела перемещения, напряжения или их комбинации (которые в общем случае не являются однородными функциями) необходимо также разложить в ряды по меридиональной координате  $\theta$ . Тогда для каждого  $n$  можно записать самостоятельную краевую задачу, состоящую из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающую получение частного решения для заданных граничных условиях.

При  $n=0$  (учитывая, что перемещение в меридиональном направлении  $u_{\theta_0} \equiv 0$ ) система уравнений (1.9) упрощается:

$$A_{11}u''_{\rho_0} + 2A_{11}\frac{1}{\rho}u'_{\rho_0} + 2(A_{12} - A_{22} - A_{23})\frac{1}{\rho^2}u_{\rho_0} = 0, \quad (1.10)$$

а ее общее решение

$$u_{\rho_0} = \rho^{-\frac{1}{2}-k} C_{10} + \rho^{-\frac{1}{2}+k} C_{20}, \quad (1.11)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{1}{4} + 2\frac{A_{22} + A_{23} - A_{12}}{A_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2\frac{E(1-\tilde{\nu})}{\tilde{E}(1-\nu)}}, \quad (1.12)$$

было получено в [41, 42]. Входящий в показатель степеней при радиальной координате в формулах (1.11) коэффициент (1.12) является показателем анизотропии, который определяется рассматриваемом случае для центрально-симметричного тела, находящегося под действием центрально-симметричной

нагрузки, и отражает соотношение между деформационными постоянными. Константы интегрирования  $C_{10}$  и  $C_{20}$  вычисляются из граничных условий. Отметим, что условие  $8E(1 - \tilde{\nu}) \geq \tilde{E}(\nu - 1)$  — неотрицательность подкоренного выражения (1.12) справедливо всегда.

Если материал сферы изотропный, то, сделав подстановку:

$$\tilde{E} = E, \quad \tilde{\nu} = \nu, \quad \tilde{G} = G = E/[2(1 + \nu)] \quad (1.13)$$

и  $k=3/2$ , преобразуем равенство (1.11) к виду:

$$u_{\rho_0} = \rho^{-2}C_{10} + \rho C_{20}. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) является известным аналитическим решением задачи о равновесии изотропной сферы, находящейся под действием равномерно распределенных внутреннего и/или внешнего давления [7–8].

Авторы [32] не рассматривают слагаемое (1.11) т.к. этого не требуется по постановке решенной задачи о равновесии тяжелой сферы жестко закрепленной по внешнему контуру, и имеющей свободную от напряжений внутреннюю поверхность.

При  $n=1$  имеем неоднородную систему дифференциальных уравнений (1.9), решение которой можно представить суперпозицией

$$u_{\rho_1} = \bar{u}_{\rho_1} + u_{\rho_1}^*, \quad u_{\theta_1} = \bar{u}_{\theta_1} + u_{\theta_1}^*$$

общих решений  $\bar{u}_{\rho_1}$  и  $\bar{u}_{\theta_1}$  соответствующих однородной и любых частных решений  $u_{\rho_1}^*$  и  $u_{\theta_1}^*$  неоднородной системы. Последние, например, будем искать в виде:

$$u_{\rho_1}^* = H_{\rho} \rho^2, \quad u_{\theta_1}^* = H_{\theta} \rho^2. \quad (1.15)$$

Подставив (1.15) в (1.9), получим равенства:

$$2H_{\rho}(3A_{11} + A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44}) + 2H_{\theta}(3A_{12} - A_{22} - A_{23} + A_{44}) = \gamma, \quad (1.16)$$

$$H_{\rho}(2A_{12} + A_{22} + A_{23} + 4A_{44}) + H_{\theta}(A_{22} + A_{23} - 4A_{44}) = \gamma,$$

и найдем коэффициенты

$$H_{\rho}H = (A_{22} + A_{23} - 2A_{12} - 2A_{44})\gamma, \quad (1.17)$$

$$H_{\theta}H = (2A_{11} - A_{22} - A_{23} - 2A_{44})\gamma,$$



$$H = 2 \left[ A_{11}(A_{22} + A_{23} - 4A_{44}) + 2A_{44}(A_{22} + A_{23} - 3A_{12}) - 2A_{12}^2 \right]$$

частного решения.

Общее решение соответствующей однородной системы будем искать в виде многочленов:

$$\bar{u}_{\rho_1} = \sum_{j=1}^4 x_j C_{j1} \rho^{\lambda_{j1}}, \quad \bar{u}_{\theta_1} = \sum_{j=1}^4 C_{j1} \rho^{\lambda_{j1}}.$$

Для этого запишем характеристическое уравнение четвертого порядка, из которого определим характеристические числа  $\lambda_{j1}$  ( $j=1,2,3,4$ ) этих общих решений системы дифференциальных уравнений (1.9):

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{21} = -1, \quad \lambda_{31} = -1/2 - t, \quad \lambda_{41} = -1/2 + t.$$

Здесь

$$t = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{2(A_{22} + A_{23} - A_{12})}{A_{11}} + \frac{A_{11}(A_{22} + A_{23}) - 2A_{12}(A_{12} + 2A_{44})}{A_{11}A_{44}}} \quad (1.18)$$

является показателем анизотропии для центрально-симметричного тела, находящегося под действием равномерно распределенной вертикальной осесимметричной нагрузки. Обратим внимание на то, что в отличие от показателя анизотропии  $k$  в формулах (1.12)  $t$  зависит от модуля сдвига в диаметральной плоскости. Эта зависимость возникает вследствие появления сдвиговых деформаций, которые отсутствуют в случае, когда нагрузка (также как само тело) обладает центральной симметрией. В случае изотропного материала  $k$  и  $t$  принимают значения  $3/2$  и  $5/2$  соответственно.

Таким образом, общее решение системы дифференциальных уравнений (1.9) при  $n=1$  запишем в виде:

$$u_{\rho_1} = x_1 C_{11} + x_2 C_{21} \frac{1}{\rho} + x_3 C_{31} \rho^{-1/2+t} + x_4 C_{41} \rho^{-1/2-t} + H_{\rho} \rho^2, \quad (1.19)$$

$$u_{\theta_1} = C_{11} + C_{21} \frac{1}{\rho} + C_{31} \rho^{-1/2+t} + C_{41} \rho^{-1/2-t} + H_{\theta} \rho^2.$$

Здесь

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{A_{22} + A_{23} + 2A_{44}}{A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44}}, \quad (1.20)$$

$$x_3 = \frac{A_{44} [A_{12} - 2(A_{22} + A_{23}) - 3A_{44} + 2(A_{12} + A_{44})t]}{2(A_{12} + A_{44})^2 - A_{11}(A_{22} + A_{23} + 2A_{44})},$$

$$x_4 = \frac{A_{44} [A_{12} - 2(A_{22} + A_{23}) - 3A_{44} - 2(A_{12} + A_{44})t]}{2(A_{12} + A_{44})^2 - A_{11}(A_{22} + A_{23} + 2A_{44})},$$

а  $C_{1_1}$ ,  $C_{2_1}$ ,  $C_{3_1}$  и  $C_{4_1}$  — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий для  $n=1$ .

В частном случае для изотропного материала ( $t=5/2$ ) коэффициенты (1.17) и (1.20), содержащиеся в решении (1.19) системы дифференциальных уравнений (1.9) при  $n=1$ , могут быть записаны в следующем виде:

$$H_\rho = \frac{\gamma(1-\nu)}{3E}, \quad H_\theta = -\frac{2\gamma\nu}{3E}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{4(1-\nu)}{4\nu-3}, \quad x_3 = \frac{4\nu-1}{2\nu-3}, \quad x_4 = 2.$$

При  $n>1$  все системы (1.9) являются однородными, и их решения находятся также в виде многочленов:

$$u_{\rho_n} = x_{1_n} C_{1_n} \rho^{\lambda_{1_n}} + x_{2_n} C_{2_n} \rho^{\lambda_{2_n}} + x_{3_n} C_{3_n} \rho^{\lambda_{3_n}} + x_{4_n} C_{4_n} \rho^{\lambda_{4_n}},$$

$$u_{\theta_n} = C_{1_n} \rho^{\lambda_{1_n}} + C_{2_n} \rho^{\lambda_{2_n}} + C_{3_n} \rho^{\lambda_{3_n}} + C_{4_n} \rho^{\lambda_{4_n}}.$$

Характеристические числа  $\lambda_{j_n}$  и коэффициенты  $x_{j_n}$  ( $j=1,2,3,4$ ) для любого  $n$  могут быть найдены из уравнений:

$$[\lambda_n(\lambda_n + 1) + \beta_{3n}] [\lambda_n(\lambda_n + 1) + \alpha_{3n}] = (\alpha_{4n}\lambda_n + \alpha_{5n})(\beta_{4n}\lambda_n + \beta_{5n}),$$

$$x_{j_n} = \frac{\lambda_{j_n}(\lambda_{j_n} + 1 - \alpha_{4n}) + \beta_{3n} - \alpha_{5n}}{\lambda_{j_n}(\lambda_{j_n} + 1 - \beta_{4n}) + \alpha_{3n} - \beta_{5n}},$$

где

$$\alpha_{sn} = a_{sn}/a_{1n}, \quad \beta_{sn} = b_{sn}/b_{1n}.$$

Постоянные интегрирования  $C_{1_n}$ ,  $C_{2_n}$ ,  $C_{3_n}$  и  $C_{4_n}$  для каждого  $n$  определяются из граничных условий соответствующей краевой задачи. Заметим, что для  $n>1$  системы дифференциальных уравнений (1.9) однородны. Это означает, что, если разложенные в ряды по  $\theta$  граничные условия для  $n>1$ , также однородны, то их решения будут тривиальными:  $u_{\rho_n} = 0$  и  $u_{\theta_n} = 0$ .

## 1.2. Равновесие тяжелой упругой трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внешней поверхностью, находящейся под действием равномерного внутреннего давления

Рассмотрим задачу о равновесии толстостенной трансверсально-изотропной сферы (имеющей внутренний радиус  $\rho_1$  и внешний –  $\rho_2$ ,  $\rho_1 < \rho_2$ ), находящейся под действием массовых сил и внутреннего давления  $p$ , с жестко закрепленной внешней поверхностью (левая часть сферы на рисунке 1.1).

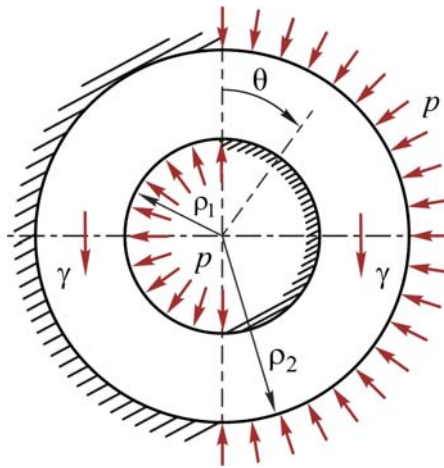


Рисунок 1.1 – Тяжелая трансверсально-изотропная сфера

Так как граничные условия

$$u_\rho|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad u_\theta|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \sigma_\rho|_{\rho=\rho_1} = -p \quad (1.21)$$

не нарушают осевой симметрии задачи, то ее решение может быть получено с помощью метода, изложенного в параграфе 1.1.

Разложив граничные условия (1.21) в ряды по меридиональной координате, можем определить постоянные интегрирования, входящие в решения систем дифференциальных уравнений (1.9), для всех членов ряда.

Константы интегрирования в уравнениях (1.11) для  $n = 0$  записываются следующим образом:

$$C_{1_0} = 2p\rho_1^{\frac{3+k}{2}} \rho_2^{2k} K^{-1}, \quad C_{2_0} = -2p\rho_1^{\frac{3+k}{2}} K^{-1}, \quad (1.22)$$

$$K = [A_{11}(2k-1) + 4A_{12}] \rho_1^{2k} + [A_{11}(2k+1) - 4A_{12}] \rho_2^{2k},$$

входящие в (1.19) при  $n=1$  — определяются из решения системы четырех линейных алгебраических уравнений:

$$-C_{1_1} + x_2 C_{2_1} \rho_2^{-1} + x_3 C_{3_1} \rho_2^{-\frac{1}{2}+t} + x_4 C_{4_1} \rho_2^{-\frac{1}{2}-t} = -H_\rho \rho_2^2,$$

$$C_{1_1} + C_{2_1} \rho_2^{-1} + C_{3_1} \rho_2^{-\frac{1}{2}+t} + C_{4_1} \rho_2^{-\frac{1}{2}-t} = -H_\theta \rho_2^2,$$

$$2C_{2_1} [2A_{12}(x_2+1) - A_{11}x_2] \rho_1^{\frac{1}{2}+t} + C_{3_1} [4A_{12}(x_3+1) + A_{11}x_3(2t-1)] \rho_1^{1+2t} + \\ + C_{4_1} [4A_{12}(x_4+1) - A_{11}x_4(2t+1)] \rho_1 = -4 [H_\rho (A_{11} + A_{12}) + H_\theta A_{12}] \rho_1^{\frac{7}{2}+t},$$

$$2C_{2_1} (x_2+2) \rho_1^{\frac{1}{2}+t} + C_{3_1} (2x_3 - 2t + 3) \rho_1^{1+2t} + \\ + C_{4_1} (2x_4 + 2t + 3) \rho_1 = 2 (H_\theta - H_\rho) \rho_1^{\frac{7}{2}+t},$$

и записываются в следующем виде:

$$K_C = A_{11} \left\{ 2 [Y_1(1+x_3) \rho_2^{2t} + Y_2(1+x_4) \rho_1^{2t}] \rho_1^{1/2} \rho_2^{1/2} - Y_5 [1+x_2] \rho_1^{1+t} \rho_2^t \right\} + \\ + 4A_{12} \left\{ [Y_3(1+x_3) \rho_2^{2t} + Y_4(1+x_4) \rho_1^{2t}] \rho_1^{1/2} \rho_2^{1/2} - \right. \\ \left. - [1+x_2] [(1+x_4)(2t-1) + (1+x_3)(2t+1)] \rho_1^{1+t} \rho_2^t \right\}, \quad (1.23)$$

$$K_C C_{1_1} = \rho_2 \left( H_\rho \left\{ 4A_{12} [Y_4 \rho_1^{1/2+2t} \rho_2^{7/2} - (x_2-x_4)(2t-1) \rho_1^{7/2+2t} \rho_2^{1/2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(x_3-x_4) \rho_1^{3+t} \rho_2^{1+t} - (x_2-x_3)(2t+1) \rho_1^{7/2} \rho_2^{1/2+2t} + Y_3 \rho_1^{1/2} \rho_2^{7/2+2t} - \right. \right. \\ \left. \left. - (x_3-x_4+2t\{2+x_4+x_3\}) \rho_1^{1+t} \rho_2^{3+t} \right] + A_{11} [4(4+3x_2)(x_4-x_3) \rho_1^{3+t} \rho_2^{1+t} + \right. \\ \left. + 2(x_2-x_4)(6+5x_3-2t\{2+x_3\}) \rho_1^{7/2+2t} \rho_2^{1/2} + 2Y_1 \rho_1^{1/2} \rho_2^{7/2+2t} + 2Y_2 \rho_1^{1/2+2t} \rho_2^{7/2} - \right. \\ \left. \left. - 2(x_2-x_3)(6+5x_4+2t\{2+x_4\}) \rho_1^{7/2} \rho_2^{1/2+2t} - Y_5 \rho_1^{1+t} \rho_2^{3+t} \right\} + \right. \\ \left. + H_\theta \left\{ -4A_{12} [2(3+2x_2)(x_3-x_4) \rho_1^{3+t} \rho_2^{1+t} - (x_2-x_4)(5+4x_3-2t) \rho_1^{7/2+2t} \rho_2^{1/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (x_2-x_3)(5+4x_4+2t) \rho_1^{7/2} \rho_2^{1/2+2t} + x_4 Y_4 \rho_1^{1/2+2t} \rho_2^{7/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + x_3 Y_3 \rho_1^{1/2} \rho_2^{7/2+2t} - x_2 (x_3-x_4+2t\{2+x_4+x_3\}) \rho_1^{1+t} \rho_2^{3+t} \right] - 2x_3 Y_1 \rho_1^{1/2} \rho_2^{7/2+2t} + \right. \\ \left. + A_{11} [4x_2(x_3-x_4) \rho_1^{3+t} \rho_2^{1+t} + 2x_3(x_2-x_4)(2t-1) \rho_1^{7/2+2t} \rho_2^{1/2} - 2x_4 Y_2 \rho_1^{1/2+2t} \rho_2^{7/2} + \right. \\ \left. \left. + 2x_4(x_2-x_3)(2t+1) \rho_1^{7/2} \rho_2^{1/2+2t} + x_2 Y_5 \rho_1^{1+t} \rho_2^{3+t} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
K_C C_{2_1} = & \rho_1 \rho_2^{1/2} \left( -H_\rho \left\{ 4A_{12} \rho_2 \left[ (1+x_4)(2t-1) \rho_1^{5/2+2t} + \right. \right. \right. \\
& + (1+x_3)(2t+1) \rho_1^{5/2} \rho_2^{2t} + (x_4-x_3-2\{2+x_4+x_3\}) \rho_1^t \rho_2^{5/2+t} \left. \left. \left. \right] + \right. \right. \\
& + A_{11} \left[ 2(1+x_3)(6+5x_4+2t\{2+x_4\}) \rho_1^{5/2} \rho_2^{1+2t} - \right. \\
& \left. \left. \left. - 2(1+x_4)(6+5x_3-2t\{2+x_3\}) \rho_1^{5/2+2t} \rho_2 - Y_5 \rho_1^t \rho_2^{7/2+t} \right] \right\} + \\
& + H_\theta \left\{ 4A_{12} \left[ (1+x_4)(5+4x_3-2t) \rho_1^{5/2+2t} \rho_2 - (1+x_3)(5+4x_4+2t) \rho_1^{5/2} \rho_2^{1+2t} + \right. \right. \\
& + (x_3-x_4+2\{2+x_4+x_3\}) \rho_1^t \rho_2^{7/2+t} \left. \left. \right] + A_{11} \rho_2 \left[ 2x_3(1+x_4)(2t-1) \rho_1^{5/2+2t} + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2x_4(1+x_3)(2t+1) \rho_1^{5/2} \rho_2^{2t} + Y_5 \rho_1^t \rho_2^{5/2+t} \right] \right\} \right), \\
K_C C_{4_1} = & 2\rho_1^t \rho_2^t \left( H_\theta \left\{ 2A_{12} \left[ 2(3+2x_2)(1+x_3) \rho_1^3 \rho_2^{1/2+t} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (5+4x_3-2t)(1+x_2) \rho_1^{7/2+t} - Y_4 \rho_1^{1/2+t} \rho_2^3 \right] - \right. \right. \\
& A_{11} \left[ 2x_2(1+x_3) \rho_1^3 \rho_2^{1/2+t} + (1+x_2)(2t-1)x_3 \rho_1^{7/2+t} + Y_2 \rho_1^{1/2+t} \rho_2^3 \right] \left. \right\} + \\
& H_\rho \left\{ 2A_{12} \left[ 2(1+x_3) \rho_1^3 \rho_2^{1/2+t} + (1+x_2)(2t-1) \rho_1^{7/2+t} - Y_4 \rho_1^{1/2+t} \rho_2^3 \right] + \right. \\
& \left. \left. \left. + A_{11} \left[ 2(4+3x_2)(1+x_3) \rho_1^3 \rho_2^{1/2+t} - (1+x_2)(6+5x_3-2t\{2+x_3\}) \rho_1^{7/2+t} - Y_2 \rho_1^{1/2+t} \rho_2^3 \right] \right] \right\} \right), \\
K_C C_{3_1} = & -2\rho_1^{1/2} \rho_2^{1/2} \left( H_\rho \left\{ A_{11} \left[ 2(4+3x_2)(1+x_4) \rho_1^{5/2+t} \rho_2 + Y_1 \rho_2^{7/2+t} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (6+5x_4+2t\{2+x_4\})(1+x_2) \rho_1^3 \rho_2^{1/2+t} \right] + \right. \right. \\
& A_{12} \left[ 2(1+x_4) \rho_1^{5/2+t} \rho_2 + Y_3 \rho_2^{7/2+t} - (1+x_2)(2t+1) \rho_1^3 \rho_2^{1/2+t} \right] \left. \right\} + \\
& H_\theta \left\{ 2A_{12} \left[ 2(3+2x_2)(1+x_4) \rho_1^{5/2+t} \rho_2 - (1+x_2)(5+4x_4+2t) \rho_1^3 \rho_2^{1/2+t} + Y_3 \rho_2^{7/2+t} \right] - \right. \\
& \left. \left. \left. - A_{11} \left[ x_2 \left( 2\{1+x_4\} \rho_1^{5/2+t} \rho_2 + (3+x_4+2t\{1-x_4\}) \rho_2^{7/2+t} - x_4 \{2t+1\} \rho_1^3 \rho_2^{1/2+t} \right) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - x_4(2t+1)(\rho_1^3 + 2\rho_2^3) \rho_2^{1/2+t} \right] \right] \right\} \right).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Y_1 = 2x_4[2t+1] - x_2[3+x_4+2t(1-x_4)], & \quad Y_3 = (1+x_2)(2t+1) - 2(1+x_4), \\
Y_2 = 2x_3[2t-1] + x_2[3+x_3+2t(x_3-1)], & \quad Y_4 = (1+x_2)(2t-1) + 2(1+x_3), \\
Y_5 = x_4(3-4t[t-1]) + x_3(4t[1+t+2x_4]-3). &
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что для  $n > 1$  решения систем дифференциальных уравнений (1.9) тривиальны ( $u_{\rho_n} = 0$  и  $u_{\theta_n} = 0$ ) в силу однородности граничных условий, а коэффициенты (1.17), (1.18) и (1.20), входящие в (1.23), определяются деформационными характеристиками материала сферы.

Решение задачи о равновесии толстостенной тяжелой изотропной сферы, находящейся под действием внутреннего давления  $p$ , с жестко закрепленной внешней поверхностью может быть записано, как частный случай полученных соотношений. Для этого следует провести замену (1.13) деформационных постоянных в выражениях (1.4).

Тогда решение системы дифференциальных уравнений (1.7) можно представить в виде:

$$u_{\rho} = C_{10}\rho + C_{20}\rho^{-2} + \left[ -C_{11} + x_2 C_{21}\rho^{-1} + x_3 C_{31}\rho^2 + 2C_{41}\rho^{-3} + H_{\rho}\rho^2 \right] \cos \theta, \quad (1.24)$$

$$u_{\theta} = \left[ C_{11} + C_{21}\rho^{-1} + C_{31}\rho^2 + C_{41}\rho^{-3} + H_{\theta}\rho^2 \right] \sin \theta,$$

$$H_{\rho} = \frac{\gamma(1-\nu)}{3E}, \quad H_{\theta} = -\frac{2\gamma\nu}{3E}, \quad x_2 = \frac{4(1-\nu)}{4\nu-3}, \quad x_3 = \frac{4\nu-1}{2\nu-3},$$

определяя из (1.22) и (1.23) константы интегрирования следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{10} &= -p\rho_1^3 K, \quad C_{20} = p\rho_1^3 \rho_2^3 K, \quad K = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E \left[ 2(1-2\nu)\rho_2^3 + (1+\nu)\rho_1^3 \right]}, \\ 3NMC_{11} &= \gamma(\nu+1) \left[ 2\rho_1^8 (6\nu^2 + \nu - 5) - 18\rho_2^8 (2\nu^2 - 3\nu + 1) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_1^5 \rho_2^3 (6\nu^2 + \nu - 2) - 9\rho_1^3 \rho_2^5 (8\nu^2 - 12\nu + 5) \right], \\ NC_{21} &= -\gamma\rho_1^3 (4\nu^2 + \nu - 3), \\ NMC_{31} &= \gamma(2\nu-3) \left[ \rho_1^5 (\nu^2 + \nu) - 2\rho_2^5 (3\nu^2 - 4\nu + 1) - \rho_1^3 \rho_2^2 (1+\nu) \right], \\ 3NMC_{41} &= \gamma\rho_1^5 \rho_2^2 (1+\nu) \left[ 2\rho_2^3 (1-2\nu) + \rho_1^3 (1+\nu) \right], \\ N &= 6E(\nu-1), \quad M = 2(2-3\nu)\rho_2^5 + (1+\nu)\rho_1^5. \end{aligned} \quad (1.25)$$

В случае отсутствия внутреннего давления решение (1.24) системы (1.7) для изотропной сферы несколько упрощается. Так как граничные условия при  $n = 0$  однородные ( $p = 0$ ), то  $u_{\rho_0} = 0$ . Следовательно

$$u_\rho = u_{\rho_1} \cos \theta, \quad u_\theta = u_{\theta_1} \sin \theta. \quad (1.26)$$

Здесь  $u_{\rho_1}$  и  $u_{\theta_1}$  определяются выражениями (1.18), с коэффициентами (1.25). Этот частный случай совпадает с решением, полученным авторами [32]. Заметим, что если сфера изготовлена из изотропного материала, то уравнения (1.15) для нахождения  $H_\rho$  и  $H_\theta$  упрощаются и примут одинаковый вид. Тогда из двух одинаковых уравнений можно определить только связь между этими коэффициентами, что и было сделано авторами [32]. Однако, если подстановку деформационных постоянных (1.13) производить в уравнения (1.17), учитывающие ограничения на материальные константы трансверсально-изотропного материала, можно определить явный вид этих коэффициентов  $H_\rho = \gamma(1-\nu)/(3E)$ ,  $H_\theta = -2\gamma\nu/(3E)$ , что принципиально нельзя было сделать ранее.

В другом частном случае, когда при определении напряженно-деформированного состояния можно пренебречь вкладом массовых сил, из полученных уравнений следует классическое аналитическое решение задачи Ламе для трансверсально-изотропной сферы [41, 42]. Из этого решения для закрепленной по внешней поверхности трансверсально-изотропной сферы со свободной от нагрузок внутренней границей следует тривиальный результат: рассматриваемое тело находится в ненапряженном состоянии.

Подстановка (1.11) и (1.19) с учетом (1.12), (1.17), (1.18), (1.20), (1.22) и (1.23) последовательно в геометрические (1.5) и определяющие (1.3) соотношения позволяет записать выражения для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} = & \frac{1}{2}\rho^{-\frac{3}{2}-k} \left\{ C_{10} [4A_{12} - A_{11}(1+2k)] + C_{20} [4A_{12} - A_{11}(1-2k)]\rho^{2k} \right\} + \\ & + \left\{ 2A_{12} \left[ (1+x_2)C_{21}\rho^{-2} + (1+x_3)C_{31}\rho^{-\frac{3}{2}+t} + (1+x_4)C_{41}\rho^{-\frac{3}{2}-t} + (H_\rho + H_\theta)\rho \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}A_{11} \left[ 2x_2C_{21}\rho^{-2} + (1-2t)x_3C_{31}\rho^{-\frac{3}{2}+t} + (1+2t)x_4C_{41}\rho^{-\frac{3}{2}-t} - 4H_\rho\rho \right] \right\} \cos \theta, \\ \tau_{\rho\theta} = & -A_{44} \left[ (2+x_2)C_{21}\rho^{-2} + \left( \frac{3}{2} + x_3 - t \right) C_{31}\rho^{-\frac{3}{2}+t} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{3}{2} + x_4 + t \right) C_{41}\rho^{-\frac{3}{2}-t} + (H_\rho - H_\theta)\rho \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = & \\ = \frac{1}{2} \rho^{-\frac{3}{2}-k} \{ & C_{10} [2(A_{22} + A_{23}) - A_{12}(1 + 2k)] + C_{20} [2(A_{22} + A_{23}) - A_{12}(1 - 2k)] \rho^{2k} \} + \\ + \left\{ (A_{22} + A_{23}) \left[ (1 + x_2) C_{21} \rho^{-2} + (1 + x_3) C_{31} \rho^{-\frac{3}{2}+t} + (1 + x_4) C_{41} \rho^{-\frac{3}{2}-t} + (H_\rho + H_\theta) \rho \right] - \right. & \\ \left. - \frac{1}{2} A_{12} \left[ 2x_2 C_{21} \rho^{-2} + (1 - 2t) x_3 C_{31} \rho^{-\frac{3}{2}+t} + (1 + 2t) x_4 C_{41} \rho^{-\frac{3}{2}-t} - 4H_\rho \rho \right] \right\} \cos \theta, & \end{aligned}$$

Если в качестве примера предположить, что железобетонные монолитные крепи сферических подземных выработок или хранилищ из осадочных пород, которые используются для длительного хранения высокоагрессивных и реакционно-способных твердых и жидких сред, представляют собой толстостенные сферические тела, жестко закрепленные по внешней поверхности, то на основе полученных соотношений можно проанализировать вклад массовых сил в напряженное состояние, а также провести оценку прочности по совокупности критериев, описывающих различные механизмы разрушения.

На рисунке 1.2 представлены распределения независимых инвариантов тензора напряжений в монолитной железобетонной крепи вдоль меридиональной и обезразмеренной радиальной  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1) / (\rho_2 - \rho_1)$  координаты. Параметры геометрии, давление и константы железобетона были выбраны следующими:  $\rho_1 = 3,0$  м,  $\rho_2 = 6,0$  м;  $p = 0$  МПа;  $E = 50,0$  ГПа,  $\tilde{E} = 35,0$  ГПа,  $\tilde{G} = 56,5$  ГПа,  $\nu = 0,075$ ,  $\tilde{\nu} = 0,15$  и  $\gamma = 40$  кН/м<sup>3</sup>. Сравнение инвариантов со своими критическими значениями может позволить провести оценку возможности реализации следующих механизмов разрушения: от растяжения или сжатия в меридиональном и радиальном направлении (описывается  $J_\sigma^I$  и  $J_\sigma^{II}$ ), от сдвига по поверхностям изотропии и межслоевого сдвига (описывается  $J_\sigma^{III}$  и  $J_\sigma^{IV}$ ) [1, 2].

Как видим, на внутренней свободной от нагрузок поверхности монолитной крепи ненулевым является только первый инвариант  $J_\sigma^I$ , который (за исключением горизонтальной диаметральной плоскости) в верхней полусфере всюду возрастает вдоль  $\tilde{\rho}$ , а в нижней — всюду убывает, принимая нулевое



значение при  $\tilde{\rho} = 0,63$  (рисунок 1.2). Была обнаружена следующая требующая дополнительного исследования закономерность: радиальная координата  $\tilde{\rho}$  точки, в которой при заданной геометрии крепи и деформационных свойствах бетона  $J_{\sigma}^I = 0$ , постоянна и не зависит от значения меридиональной координаты.

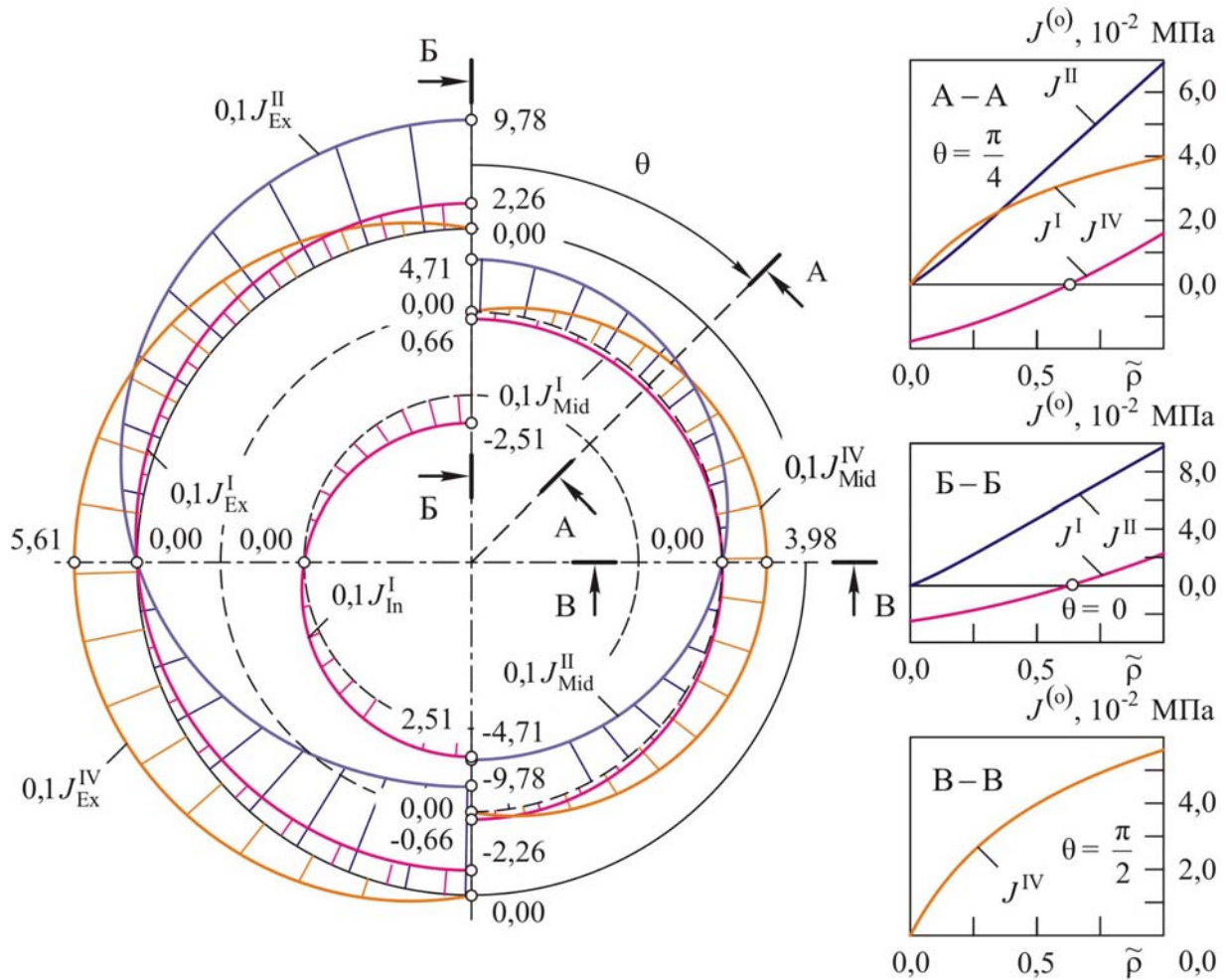


Рисунок 1.2 – Распределение инвариантов тензора напряжений (КПа) на закрепленной внешней ( $J_{Ex}^{(o)}$ ), свободной от нагрузок внутренней ( $J_{In}^{(o)}$ ) и срединной ( $J_{Mid}^{(o)}$ ) поверхностях

При изменении радиальной координаты от свободной внутренней к закрепленной внешней поверхности второй инвариант  $J_{\sigma}^{II}$  всюду возрастает по абсолютной величине. Поскольку свои наибольшие по абсолютной величине значения  $J_{\sigma}^I$  и  $J_{\sigma}^{II}$  достигают в точках, лежащих на центральной вертикальной оси, эти точки наиболее опасны для инициирования разрушения крепи от растяжения или сжатия в меридиональном и радиальном направлении.

Третий инвариант  $J_{\sigma}^{III}$  во всех точках равен нулю. Последнее связано с тем, что  $\sigma_{\varphi\theta} \equiv 0$ , а при  $n=0$  и  $n=1$  имеет место равенство окружных и меридиональных напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$ . Четвертый инвариант  $J_{\sigma}^{IV}$  равен нулю в точках, расположенных на вертикальной центральной оси. При заданном и неизменном значении  $\tilde{\rho}$  инвариант  $J_{\sigma}^{IV}$  возрастает по мере увеличения угла  $\theta$  в точках верхнего и убывает в точках нижнего свода, достигая своего максимума в горизонтальной диаметральной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ). Кроме того, в радиальном направлении  $J_{\sigma}^{IV}$  монотонно возрастает, принимая свои наибольшие величины на внешней закрепленной поверхности. Поэтому в этих точках, принадлежащих диаметральной плоскости (при  $\theta = \pi/2$ ), возможно появление области материала крепи, разрушенного по механизму межслойного сдвига.

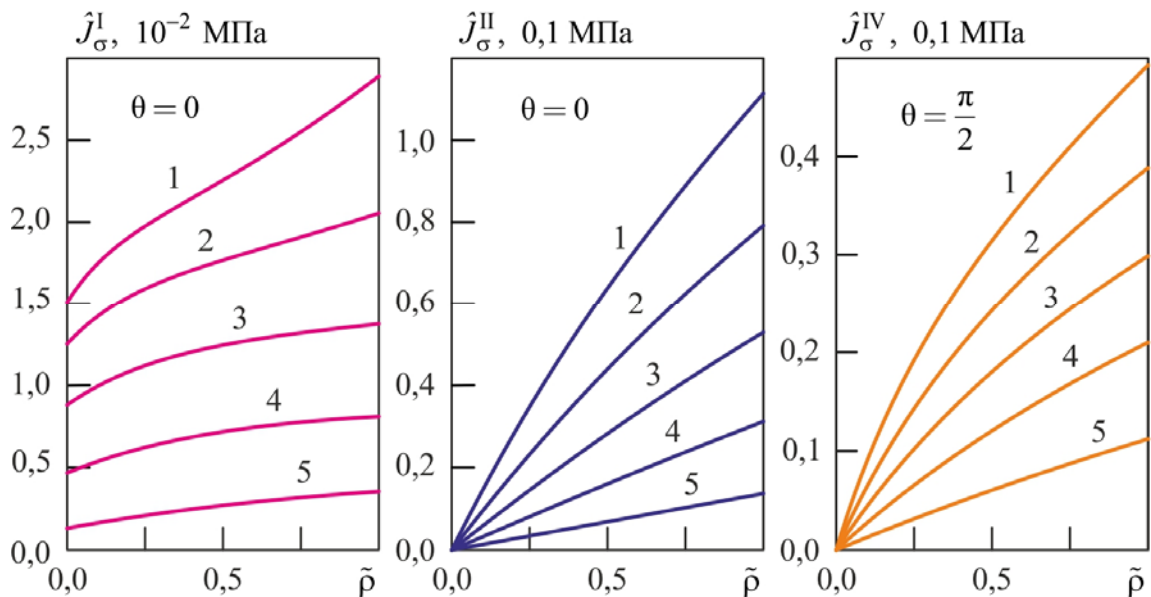


Рисунок 1.3 – Распределение  $\hat{J}_{\sigma}^{(\bullet)}$  (МПа) в характерных сечениях монолитной железобетонной крепи: 1 –  $\Delta = 0,5$ , 2 –  $\Delta = 0,6$ , 3 –  $\Delta = 0,7$ , 4 –  $\Delta = 0,8$  и 5 –  $\Delta = 0,9$

На рисунке 1.3 показано влияние толщины сферы  $\Delta = \rho_1/\rho_2$  на характер распределения ненулевых безразмерных инвариантов  $\hat{J}_{\sigma}^{(\bullet)} = J_{\sigma}^{(\bullet)}/\gamma\rho_1$  тензора напряжений вдоль радиальной координаты  $\tilde{\rho}$ , показавшее, что с увеличением толщины сферы (т.е. с уменьшением  $\Delta$ ) увеличивается наклон кривых и

возрастают (по абсолютной величине) значения  $J_{\sigma}^{(\bullet)}$  в точках закрепления. Кроме того, во всех точках сферы наблюдается возрастание абсолютных значений первого инварианта  $J_{\sigma}^I$ , при увеличении ее толщины.

### **1.3. Численные решения задачи о равновесии тяжелой упругой трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внешней поверхностью в пакетах ANSYS и ABAQUS**

Большую популярность при решении научных и инженерных задач, возникающих при определении напряженно-деформированного состояния, оптимальном проектировании и оценке прочности элементов конструкций ответственного назначения, получили численные методы. Это обусловлено быстрым развитием, доступностью и огромными возможностями современной вычислительной техники.

При проведении вычислительных экспериментов по исследованию напряженно-деформированного состояния элементов конструкций возникает вопрос о корректности полученных результатов: для успешного применения численных методов требуется провести оценку правильности составленного алгоритма, обоснование выбора способа и степени дискретизации на основе сравнения численных расчетов с аналитическими решениями тестовых задач для тел простейшей геометрии. Наиболее остро (из-за ограниченного количества задач, имеющих аналитические решения) эта проблема возникает при необходимости учета в расчетах анизотропии деформационных и прочностных свойств материалов,

Определение перемещений, деформаций и напряжений в толстостенной сфере с жестко закрепленной внешней поверхностью, находящейся в равновесии под действием массовых сил, может быть проведено численно методом конечных элементов в пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11. Краевая задача является осесимметричной относительно вертикальной диаметральной оси. Этот вывод следует из центральной симметрии рассматриваемого тела и осевой симметрии действующей нагрузки.

Сравнение результатов расчетов методом конечных элементов с полученным аналитическим решением будем проводить предполагая, что внутреннее давление отсутствует ( $p = 0$  МПа), а геометрические параметры и свойства материала центрально-симметричного тела принимают следующие значения:  $\rho_1 = 3,0$  м и  $\rho_2 = 6,0$  м;  $\gamma = 40,0$  кН/м<sup>3</sup>,  $E = 40,0$  ГПа,  $\tilde{E} = 25,0$  ГПа,  $\tilde{G} = 11,0$  ГПа,  $\nu = 0,075$  и  $\tilde{\nu} = 0,15$ .

Было установлено, что численно определенные значения компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений в осесимметричной постановке для трансверсально-изотропного тела в сферической системе координат в точках экстремумов совпадают с величинами, вычисленными аналитически по формулам (1.19), (1.27) и коэффициентами (1.23) с погрешностью, не превышающей 0,1 %.

Исследование напряженно-деформированного состояния анизотропных элементов конструкций сложной формы требует решения краевых задач в трехмерных постановках, учитывающих особенности геометрии конструкций и характер приложенных нагрузок. В связи с этим, следует обратить внимание на ограничения, отмеченные в документации к пакету ANSYS (ANSYS Release 13.0 Documentation): «Singularities also occur in the spherical coordinate system at  $\Phi = \pm 90^\circ$ , such that these locations should not be used» (из-за возникающей сингулярности для сферической системы координат не следует использовать сечения сферы с окружной координатой  $\varphi = \pm \pi/2$ ).

Проведем в пакете ANSYS 13.0 дискретизацию симметричной четвертой части толстостенной сферы в локальной сферической системе координат, развернутой на угол  $\varphi = \pi/4$  относительно вертикальной оси OY, на 1920 (5 элементов вдоль радиуса) и на 15360 (10 элементов вдоль радиуса, для проверки сходимости) гексаэдральных элементов solid 95 с квадратичной аппроксимацией поля перемещений так, чтобы получилась регулярная сетка конечных элементов, согласующаяся с симметрией тела. В пакете ABAQUS 6.11 были использованы те же самые конечноэлементные сетки, которые состояли из элементов C3D20R с квадратичной аппроксимацией поля перемещений и имели такие же степени

дискретизации (1920 и 15360 элементов). При использовании сферической системы координат в пакете ANSYS индекс X отождествляется с радиальным  $\rho$ , Y — с меридиональным  $\theta$ , а Z — с окружным  $\varphi$  направлением.

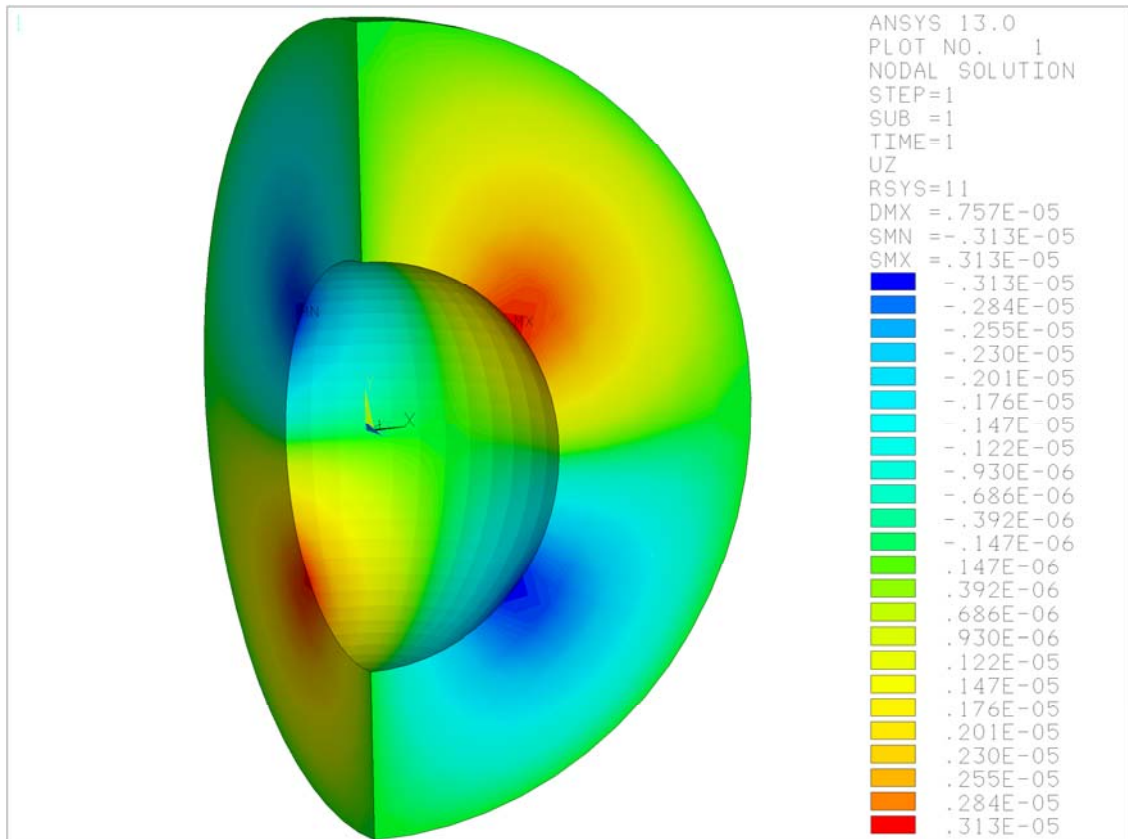


Рисунок 1.4 – Распределение окружной компоненты вектора перемещений UZ (обозначения пакета ANSYS) в тяжелой толстостенной сфере с жестко закрепленной внешней поверхностью

Вследствие особенностей определения в пакетах ANSYS и ABAQUS сферической системы координат результат численного конечноэлементного решения задачи соответствует осесимметричному случаю, рассмотренному ранее только в точках диаметральной плоскости при  $\varphi = 0$ . В любых других точках тяжелого центрально-симметричного тела радиальные компоненты искомых полей совпадают с вычисленными аналитически. Однако меридиональные и окружные компоненты вектора перемещений, а также сдвиговые деформации и касательные напряжения значительно отличаются. Так, например, в аналитическом решении перемещения  $u_\varphi$  являются нулевыми. А результаты конечноэлементного решения, полученные с использованием пакета ANSYS 13.0

(рисунок 1.4) показывают, что эти же самые окружные перемещения оказываются сопоставимыми по абсолютной величине с экстремальными значениями остальных компонент вектора перемещений. Аналогичные ненулевые значения имеют место в полученном численном конечноэлементном решении и для компонент тензоров деформаций и напряжений, которые по постановке задачи должны быть нулевыми.

Для исключения зависимости искомых полей напряжений и деформаций, полученных в результате численного решения краевых задач методом конечных элементов, от системы координат представим результаты в инвариантной форме. Как следствие, сравнение аналитического и численного решения будем проводить по инвариантным величинам.

Следует обратить особое внимание на то, что в пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11 отсутствует возможность представления напряжений и деформаций в инвариантном виде. Однако необходимые величины могут быть вычислены путем алгебраических преобразований над полученными результатами в компонентной форме.

На рисунке 1.5 представлены распределения ненулевых инвариантов тензора напряжений в точках тяжелой сферы вдоль меридиональной и обезразмеренной радиальной координаты  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1) / (\rho_2 - \rho_1)$ , построенные на основе полученного аналитического решения (1.27).

Максимальные по абсолютной величине значения инварианты тензора напряжений принимают в точках, принадлежащих вертикальной оси ( $J_{\sigma}^I$  и  $J_{\sigma}^{II}$ ) и горизонтальной диаметральной плоскости ( $J_{\sigma}^{IV}$ ). Было обнаружено хорошее качественное и количественное совпадение полученных численных результатов в инвариантной форме с аналитическим решением. Максимальная погрешность не превышает 2 %.

В таблицах 1.1 и 1.2 представлены значения независимых инвариантов тензора напряжений в характерных точках 1–6 (рисунок 1.5). При определении искомых величин в результате численных конечноэлементных решений в пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11 использовались средние значения по узлам линий, проходящих через соответствующую точку. При этом  $\varphi$  изменялось в пределах от

$-\pi/4$  до  $\pi/4$ , а радиальная  $\rho$  и меридиональная  $\theta$  координаты были постоянны. Обратим еще раз внимание на то, что численные решения краевых задач получены на одних и тех же сетках. Представленные в первых двух строках значения независимых инвариантов для всех характерных точек тяжелой трансверсально-изотропной сферы демонстрируют сходимость полученных численных решений к аналитическим при увеличении степени дискретизации.

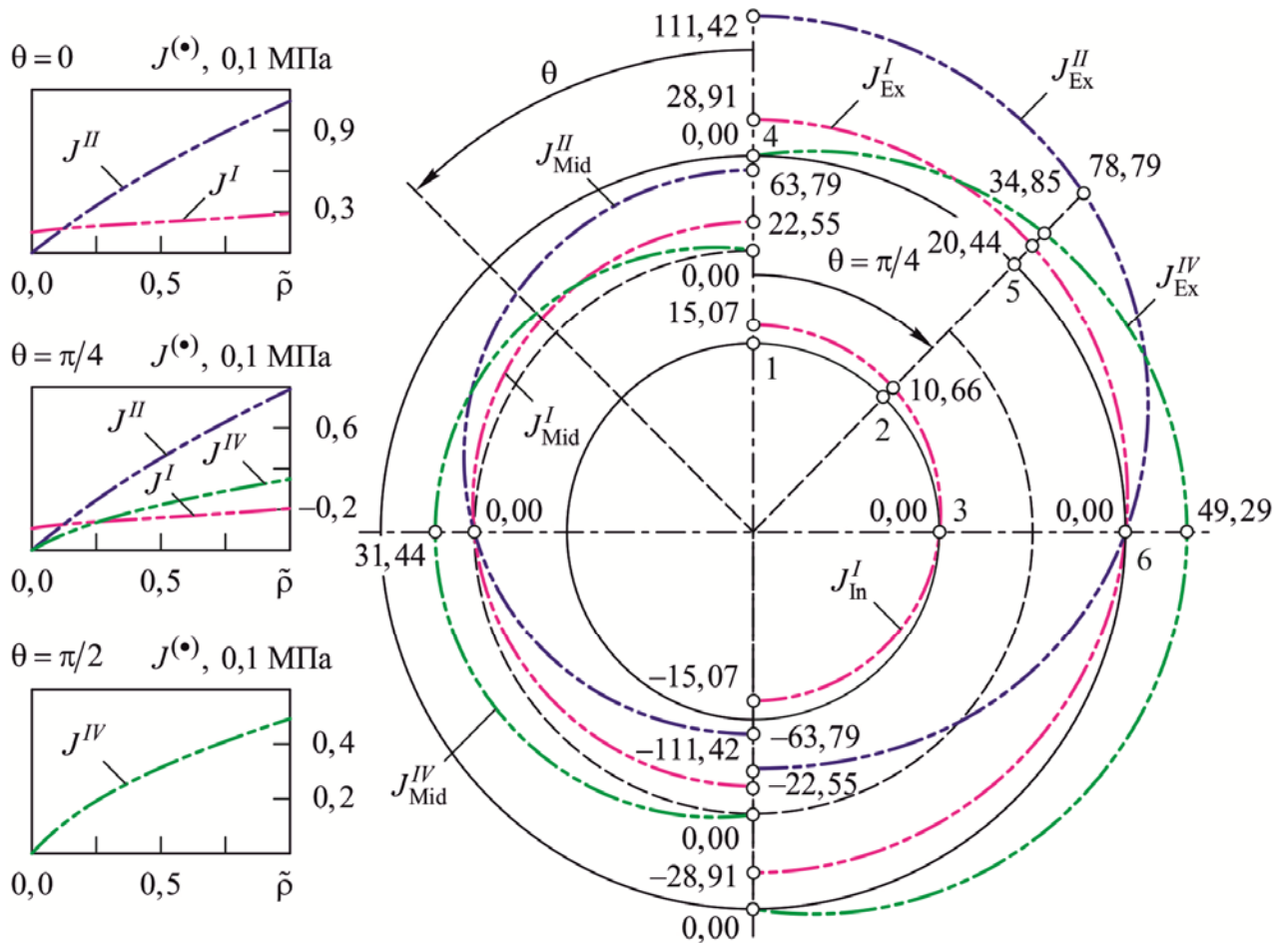


Рисунок 1.5 – Распределение инвариантов тензора напряжений на свободной от нагрузок внутренней ( $J_{In}^{(\bullet)}$ ), закрепленной внешней ( $J_{Ex}^{(\bullet)}$ ) и срединной ( $J_{Mid}^{(\bullet)}$ ) поверхностях

Таким образом, полученное аналитическое решение задачи о равновесии жестко закрепленного по внешней поверхности трансверсально-изотропного центрально-симметричного тела, находящегося под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил, позволило провести качественное и количественное сравнение полей напряжений в точках поперечных сечений с результатами численного решения той же задачи в осесимметричной и трехмерной постановках в конечноэлементных пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11.

Таблица 1.1. Значения независимых инвариантов тензора напряжений в характерных точках тяжелой сферы (ANSYS 13.0)

№ точки	$J_{\sigma}^I$ , КПа	$J_{\sigma}^{II}$ , КПа	$J_{\sigma}^{III}$ , КПа	$J_{\sigma}^{IV}$ , КПа
1	15.31	0.33	0.01	0.00
	15.15	0.06	0.00	0.00
	15.07	0.00	0.00	0.00
2	10.83	0.24	0.07	0.54
	10.71	0.05	0.00	0.16
	10.66	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.76
	0.00	0.00	0.00	0.22
	0.00	0.00	0.00	0.00
4	28.94	111.66	0.00	0.00
	28.92	111.48	0.00	0.00
	28.91	111.42	0.00	0.00
5	20.45	78.89	0.14	34.92
	20.44	78.81	0.02	34.87
	20.44	78.79	0.00	34.85
6	0.00	0.00	0.00	49.37
	0.00	0.00	0.00	49.31
	0.00	0.00	0.00	49.29

Примечание: значения независимых инвариантов, полученные при численном решении краевой задачи в пакете ANSYS 13.0 (дискретизация четверти толстостенной сферы на 1920 и 15360 элементов Solid95 соответственно) — верхнее и среднее число, аналитическое решение — нижнее число

Определенные численно методом конечных элементов напряжения и деформации в сферической системе координат (трехмерная постановка) необходимо представлять в инвариантной (относительно ортогональных преобразований, допустимых над трансверсально-изотропным телом) форме. Это позволит исклю-



чить ошибки, связанные только с особенностями определения указанной системы координат в конечноэлементных пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11.

Таблица 1.2. Значения независимых инвариантов тензора напряжений в характерных точках тяжелой сферы (ABAQUS 6.11)

№ точки	$J_{\sigma}^I$ , КПа	$J_{\sigma}^{II}$ , КПа	$J_{\sigma}^{III}$ , КПа	$J_{\sigma}^{IV}$ , КПа
1	15.34	0.22	0.01	0.05
	15.07	0.00	0.01	0.00
	15.07	0.00	0.00	0.00
2	10.83	0.23	0.01	0.42
	10.67	0.00	0.00	0.02
	10.66	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.54
	0.00	0.00	0.00	0.03
	0.00	0.00	0.00	0.00
4	28.94	111.71	0.00	0.07
	28.91	111.43	0.00	0.00
	28.91	111.42	0.00	0.00
5	20.46	78.84	0.01	34.96
	20.44	78.79	0.00	34.86
	20.44	78.79	0.00	34.85
6	0.00	0.00	0.00	49.37
	0.00	0.00	0.00	49.31
	0.00	0.00	0.00	49.29

Примечание: значения независимых инвариантов, полученные при численном решении краевой задачи в пакете ABAQUS 6.11 (дискретизация четверти толстостенной сферы на 1920 и 15360 элементов C3D20R соответственно) — верхнее и среднее число, аналитическое решение — нижнее число

### 1.4. Равновесие тяжелой упругой трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью, находящейся под действием равномерного внешнего давления

Равновесие толстостенной тяжелой трансверсально-изотропной сферы обеспечивается жестким закреплением внутренней поверхности радиуса  $\rho_1$  и действием равномерного давления  $p$  на внешней поверхности, которая ограничена радиусом  $\rho_2$  (левая часть на рисунке 1.1).

Граничные условия

$$u_\rho|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad u_\theta|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad \sigma_\rho|_{\rho=\rho_2} = -p \quad (1.28)$$

не нарушают осевой симметрии задачи, поэтому, применяя изложенный в параграфе 1.1 метод, запишем выражения для радиального  $u_\rho$  и меридионального  $u_\theta$  перемещений в виде рядов (1.8) и, воспользовавшись разложением граничных условий (1.28) в ряды по полиномам  $P_n(\cos\theta)$ , определим постоянные интегрирования общего решения систем дифференциальных уравнений (1.9) для всех членов ряда.

Входящие в уравнение (1.11) константы интегрирования при  $n=0$  определяться в виде:

$$C_{10} = 2p\rho_1^{2k}\rho_2^{\frac{3}{2}+k}K^{-1}, \quad C_{20} = -2p\rho_2^{\frac{3}{2}+k}K^{-1}, \quad (1.29)$$

$$K = [A_{11}(2k+1) - 4A_{12}]\rho_1^{2k} + [A_{11}(2k-1) + 4A_{12}]\rho_2^{2k},$$

при  $n=1$  константы из (1.18) находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$2C_{21}[2A_{12}(x_2+1) - A_{11}x_2]\rho_2^{\frac{1}{2}+t} + C_{31}[4A_{12}(x_3+1) + A_{11}x_3(2t-1)]\rho_2^{1+2t} + C_{41}[4A_{12}(x_4+1) - A_{11}x_4(2t+1)]\rho_2 = -4[H_\rho(A_{11} + A_{12}) + H_\theta A_{12}]\rho_2^{\frac{7}{2}+t}, \quad (1.30)$$

$$x_1C_{11} + x_2C_{21}\rho_1^{-1} + x_3C_{31}\rho_1^{-\frac{1}{2}+t} + x_4C_{41}\rho_1^{-\frac{1}{2}-t} = -H_\rho\rho_1^2,$$

$$C_{11} + C_{21}\rho_1^{-1} + C_{31}\rho_1^{-\frac{1}{2}+t} + C_{41}\rho_1^{-\frac{1}{2}-t} = -H_\theta\rho_1^2,$$

$$2C_{1_1} (x_1 + 1)\rho_2^{\frac{3}{2}+t} + 2C_{2_2} (x_2 + 2)\rho_2^{\frac{1}{2}+t} + C_{3_1} (2x_3 - 2t + 3)\rho_2^{1+2t} + \\ + C_{4_1} (2x_4 + 2t + 3)\rho_2 = 2(H_\theta - H_\rho)\rho_2^{\frac{7}{2}+t},$$

и записываются выражениями (1.23), в которых необходимо провести замену  $\rho_1$  на  $\rho_2$  и  $\rho_2$  на  $\rho_1$ . При всех  $n > 1$  будем иметь  $u_{\rho_n} = 0$  и  $u_{\theta_n} = 0$  в силу однородности граничных условий.

Подставляя уравнения (1.11) и (1.19) в геометрические соотношения (1.5), получим компоненты тензора деформации

$$\varepsilon_{\rho\rho} = -\frac{1}{2}\left\{C_{1_0} (1 + 2k)\rho^{-3/2-k} + C_{2_0} (1 - 2k)\rho^{-3/2+k} + \right. \\ \left. + \left[2x_2C_{2_1}\rho^{-2} + (1 - 2t)x_3C_{3_1}\rho^{-3/2+t} + (1 + 2t)x_4C_{4_1}\rho^{-3/2-t} - 4H_\rho\rho\right]\cos\theta\right\}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = C_{1_0}\rho^{-3/2-k} + C_{2_0}\rho^{-3/2+k} + \\ + \left[(1 + x_2)C_{2_1}\rho^{-2} + (1 + x_3)C_{3_1}\rho^{-3/2+t} + (1 + x_4)C_{4_1}\rho^{-3/2-t} + (H_\rho + H_\theta)\rho\right]\cos\theta, \\ \gamma_{\rho\theta} = -\left[\left(2 + x_2\right)C_{2_1}\rho^{-2} + \left(\frac{3}{2} + x_3 - t\right)C_{3_1}\rho^{-3/2+t} + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} + x_4 + t\right)C_{4_1}\rho^{-3/2-t} + (H_\rho - H_\theta)\rho\right]\sin\theta$$

Затем из определяющих уравнений (1.3) найдем компоненты тензора напряжений в виде (1.27) с предварительно вычисленными коэффициентами и константами интегрирования из (1.12), (1.17), (1.18), (1.20), (1.29) и (1.30)

Если отсутствует внешнее давление, то граничные условия при  $n=0$  однородны. Поэтому  $u_{\rho_0} = 0$ , и решение (1.8) задачи о равновесии тяжелой трансверсально-изотропной сферы с закрепленной внутренней поверхностью и свободной от нагрузок внешней может быть записано в виде (1.26). Все множители при тригонометрических функциях и постоянные интегрирования определяются из выражений (1.19) с коэффициентами (1.17), (1.18) и (1.20) и уравнений (1.30).

Результат подстановки материальных констант (1.13) в уравнения (1.4), формулы (1.29) и найденные из решения системы алгебраических уравнений (1.30) постоянные интегрирования позволяет записать решение задачи о равновесии толстостенной тяжелой изотропной сферы с жестко закрепленной

внутренней поверхностью, находящейся под действием внешнего давления  $p$ , выражениями (1.24) с константами, определяемыми следующим образом:

$$C_{10} = -p\rho_2^3 K, \quad C_{20} = p\rho_1^3 \rho_2^3 K, \quad K = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E[2(1-2\nu)\rho_1^3 + (1+\nu)\rho_2^3]}, \quad (1.31)$$

$$3NM\rho_1 C_{11} = \gamma(\nu+1)[18\rho_1^8(2\nu^2-3\nu+1) - 2\rho_2^8(6\nu^2+\nu-5) - \rho_1^3 \rho_2^5(6\nu^2+\nu-2) + 9\rho_1^5 \rho_2^3(8\nu^2-12\nu+5)],$$

$$NC_{21} = -\gamma\rho_2^3(4\nu^2+\nu-3), \quad N = 6E(\nu-1), \quad M = 2(3\nu-2)\rho_1^5 - (\nu+1)\rho_2^5,$$

$$NMC_{31} = \gamma(2\nu-3)[2\rho_1^5(3\nu^2-4\nu+1) - \rho_2^5(\nu^2+\nu) + \rho_1^2 \rho_2^3(1+\nu)],$$

$$3NMC_{41} = \gamma\rho_1^2 \rho_2^5(1+\nu)[2\rho_1^3(2\nu-1) - \rho_2^3(1+\nu)].$$

Полученные соотношения позволяют записать выражения для деформаций:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = C_{20} - 2C_{10}\rho^{-3} + [2x_3 C_{31}\rho - x_2 C_{21}\rho^{-2} - 6C_{41}\rho^{-4} + 2H_\rho\rho] \cos\theta,$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = C_{20} + C_{10}\rho^{-3} + [(1+x_2)C_{21}\rho^{-2} + (1+x_3)C_{31}\rho + 3C_{41}\rho^{-4} + (H_\rho + H_\theta)\rho] \cos\theta,$$

$$\gamma_{\rho\theta} = -[(2+x_2)C_{21}\rho^{-2} + (x_3-1)C_{31}\rho + 6C_{41}\rho^{-4} + (H_\rho - H_\theta)\rho] \sin\theta$$

и напряжений:

$$\tau_{\rho\theta} = -A_{44} [(2+x_2)C_{21}\rho^{-2} + (x_3-1)C_{31}\rho + 6C_{41}\rho^{-4} + (H_\rho - H_\theta)\rho] \sin\theta,$$

$$\sigma_{\rho\rho} = 2C_{10}(A_{12} - A_{11})\rho^{-3} + C_{20}(2A_{12} + A_{11}) + \{2A_{12}[(1+x_2)C_{21}\rho^{-2} + (1+x_3)C_{31}\rho + 3C_{41}\rho^{-4} + (H_\rho + H_\theta)\rho] - A_{11}[x_2 C_{21}\rho^{-2} - 2x_3 C_{31}\rho + 6C_{41}\rho^{-4} - 2H_\rho\rho]\} \cos\theta,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = C_{10}(A_{22} + A_{23} - 2A_{12})\rho^{-3} + C_{20}(A_{22} + A_{23} + A_{12}) + \{(A_{22} + A_{23})[(1+x_2)C_{21}\rho^{-2} + (1+x_3)C_{31}\rho + 3C_{41}\rho^{-4} + (H_\rho + H_\theta)\rho] - A_{12}[x_2 C_{21}\rho^{-2} - 2x_3 C_{31}\rho + 6C_{41}\rho^{-4} - 2H_\rho\rho]\} \cos\theta,$$

Здесь  $H_\rho = \frac{\gamma(1-\nu)}{3E}$ ,  $H_\theta = -\frac{2\gamma\nu}{3E}$ ,  $x_2 = \frac{4(1-\nu)}{4\nu-3}$ ,  $x_3 = \frac{4\nu-1}{2\nu-3}$ .

На основе полученного аналитического решения (1.24) и (1.31) можно проанализировать распределение инвариантов тензора напряжений в тяжелой трансверсально-изотропной сфере (окружающем сферические горные выработки массиве «мягких» осадочных пород, подкрепленном недеформируемой крепью, которая моделируется жестким закреплением на внутренней поверхности) вдоль радиальной координаты при заданной меридиональной, а также вдоль меридиональной линии при фиксированном радиусе. В качестве примера «мягких» осадочных пород будем рассматривать мрамор.

На рисунке 1.6 представлены распределения ненулевых независимых инвариантов тензора напряжений в тяжелой мраморной сфере, закрепленной по внутренней поверхности, вдоль меридиональной и обезразмеренной радиальной  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1) / (\rho_2 - \rho_1)$  координаты при следующих параметрах геометрии, давлении и материальных константах:  $\rho_1 = 3,0$  м,  $\rho_2 = 6,0$  м;  $p = 0$  МПа;  $E = 55,0$  ГПа,  $\tilde{E} = 23,0$  ГПа,  $\tilde{G} = 29,0$  ГПа,  $\nu = 0,29$ ,  $\tilde{\nu} = 0,32$  и  $\gamma = 2,7$  г/см<sup>3</sup>.

Только первый инвариант тензора напряжений  $J_{\sigma}^I$  является ненулевым на внешней свободной от нагрузок поверхности сферы (на этой границе давление  $p = 0$  МПа). Этот инвариант в верхней полусфере всюду возрастает вдоль радиальной координаты, а в нижней — всюду убывает. Второй инвариант  $J_{\sigma}^{II}$  демонстрирует немонотонное поведение: в верхней полусфере возрастает при  $0,00 \leq \tilde{\rho} \leq 0,25$  и убывает, если  $0,25 \leq \tilde{\rho} \leq 1,00$ , а в нижней полусфере — в интервалах  $0,25 \leq \tilde{\rho} \leq 1,00$  и  $0,00 \leq \tilde{\rho} \leq 0,25$  соответственно. Обнаруживает себя требующее дополнительного исследования постоянство (не зависящее от значения меридиональной координаты  $\theta$ ) расположения точки минимума для  $J_{\sigma}^{II}$  в верхней полусфере и максимум — в нижней при  $\tilde{\rho} = 0,25$  (при заданной геометрии сферы и деформационных свойствах мрамора).

В горизонтальной диаметральной плоскости  $J_{\sigma}^I$  и  $J_{\sigma}^{II}$  принимают нулевые значения, а наибольших по абсолютной величине значений первый и второй инварианты достигают в точках, лежащих на вертикальной центральной оси. Эти точки наиболее опасны при реализации механизмов разрушения сферы от растяжения или сжатия в меридиональном и радиальном направлении.

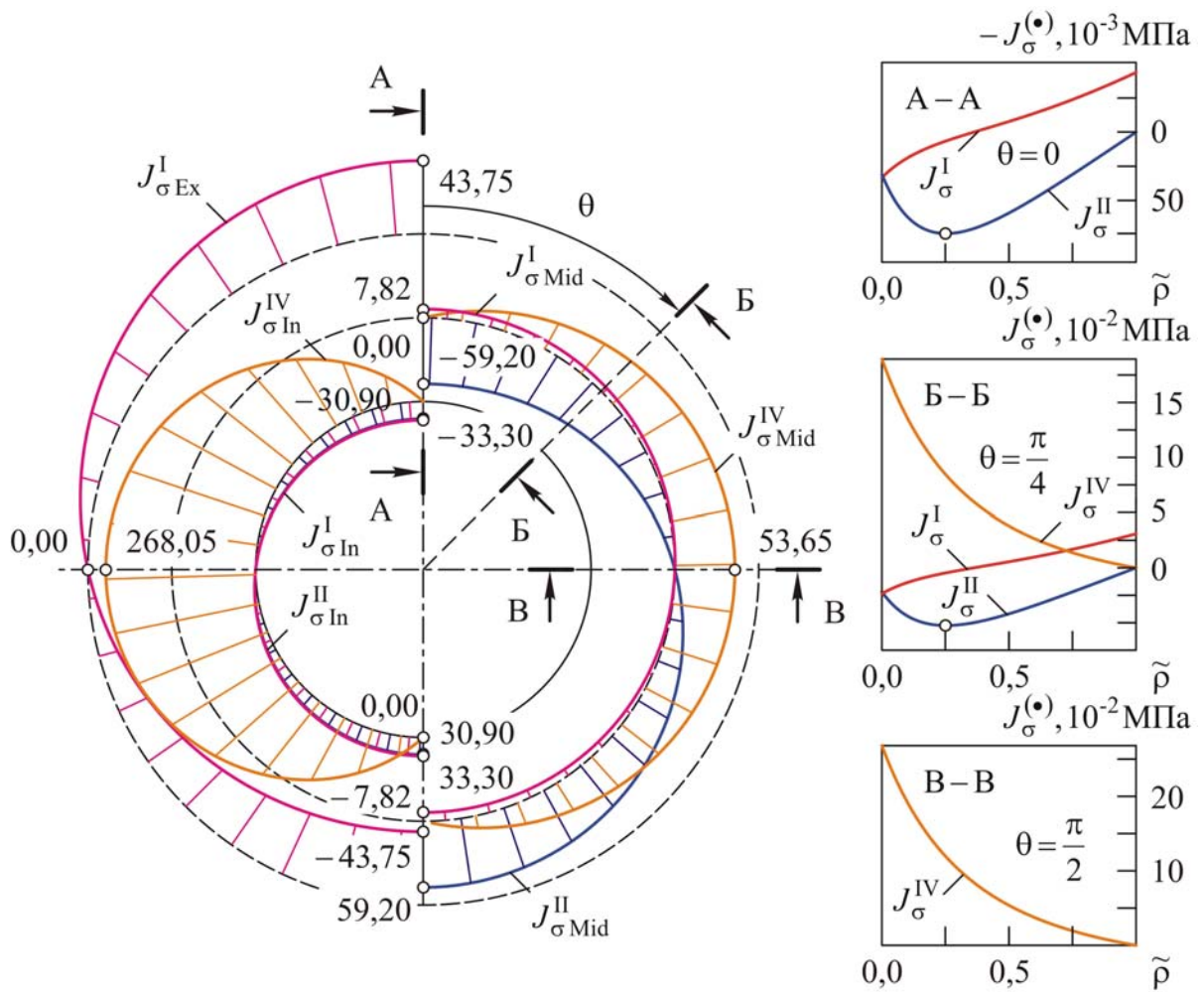


Рисунок 1.6 – Распределение инвариантов тензора напряжений (КПа)

на свободной от нагрузок внешней ( $J_{\sigma Ex}^{(\bullet)}$ ), жестко закрепленной внутренней ( $J_{\sigma In}^{(\bullet)}$ ) и срединной ( $J_{\sigma Mid}^{(\bullet)}$ ) поверхностях

Третий инвариант  $J_{\sigma}^{III}$  во всех точках тяжелой сферы равен нулю. Четвертый инвариант  $J_{\sigma}^{IV}$  принимает нулевые значения в точках, расположенных на вертикальной диаметральной оси, возрастает по мере увеличения угла  $\theta$  в верхней полусфере и убывает в нижней, достигая максимума при заданной и неизменной координате  $\tilde{\rho}$  в горизонтальной диаметральной плоскости. В радиальном направлении  $J_{\sigma}^{IV}$  монотонно убывает с максимальных значений на внутренней закрепленной поверхности до нуля на внешней свободной от нагрузок границе. Поэтому точки внутренней закрепленной поверхности при  $\theta = \pi/2$ , принадлежащие горизонтальной диаметральной плоскости, наиболее опасны для начала разрушения сферы по механизму межслойного сдвига.

На рисунке 1.7 показано влияние толщины полой толстостенной сферы  $\delta = \rho_1/\rho_2$  на характер распределения ненулевых безразмерных инвариантов тензора напряжений  $\hat{J}_\sigma^{(\bullet)} = J_\sigma^{(\bullet)}/(\gamma\rho_1)$  вдоль радиальной координаты  $\tilde{\rho}$ .

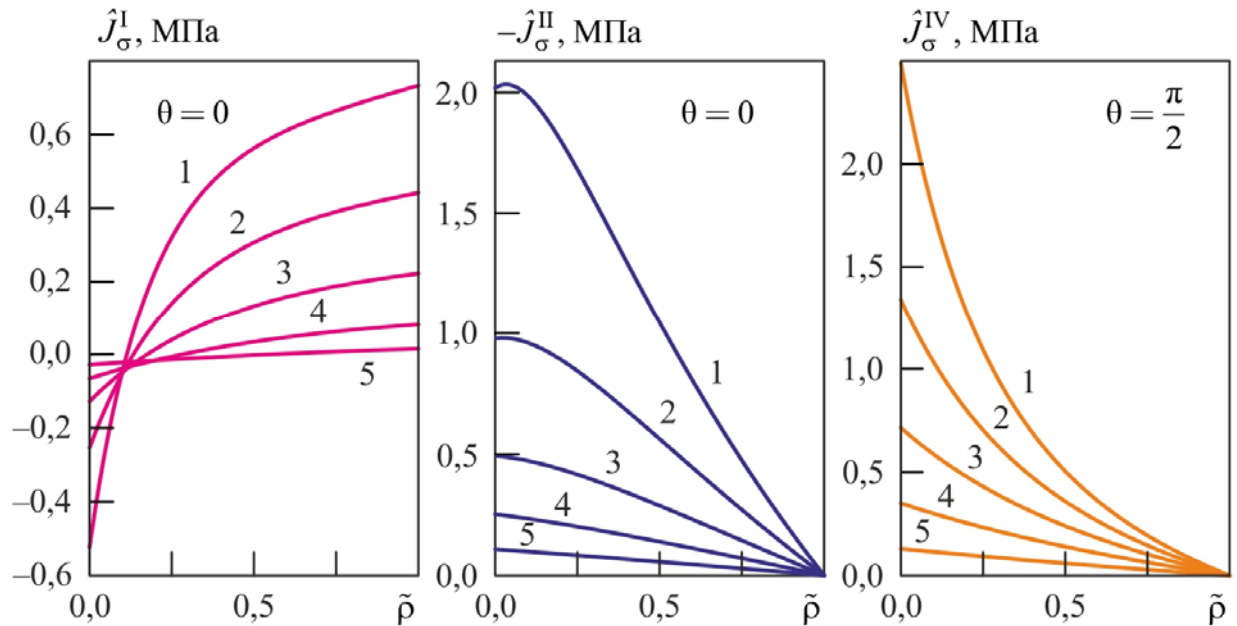


Рисунок 1.7 – Распределения  $\hat{J}_\sigma^{(\bullet)}$  в характерных сечениях толстостенной сферы:

$$1 - \delta = 0,5, \quad 2 - \delta = 0,6, \quad 3 - \delta = 0,7, \quad 4 - \delta = 0,8, \quad 5 - \delta = 0,9$$

С ростом  $\delta$  увеличивается наклон кривых и возрастают (по абсолютной величине) значения всех ненулевых инвариантов в точках закрепления. Расстояние, на котором от геометрического центра происходит смена знака первого инварианта  $J_\sigma^I$ , при увеличении толщины сферы смещается к внутренней закрепленной поверхности.

Полученное аналитическое решение (1.11) и (1.19) позволяет также проанализировать распределение перемещений точек трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел. На рисунке 1.8 проиллюстрировано изменение свободных от закрепления поверхностей (внутренней — справа и внешней — слева) тяжелой мраморной сферы ( $E = 55,0$  ГПа,  $\tilde{E} = 23,0$  ГПа,  $\tilde{G} = 29,0$  ГПа,  $\nu = 0,29$ ,  $\tilde{\nu} = 0,32$  и  $\gamma = 2,7$  г/см<sup>3</sup>) при заданных равномерных избыточных (превосходящих атмосферное) давлениях  $p = 0$  МПа и  $p = 5$  МПа и геометрических параметрах  $\rho_1 = 3,0$  м,  $\rho_2 = 6,0$  м.

Как видим, при заданных размерах и деформационных константах материала в случае отсутствия давления перемещения точек свободной поверхности в верхней полусфере отрицательные, в нижней полусфере изменяют знак на расстояниях 0,42 м (если закреплена внутренняя) и 0,17 м (если закреплена внешняя поверхность) от горизонтальной диаметральной плоскости. Обратим внимание на то, что под действием равномерного давления  $p = 5$  МПа каждая точка внутренней или внешней незакрепленной поверхности получает дополнительное однородно распределенное радиальное перемещение.

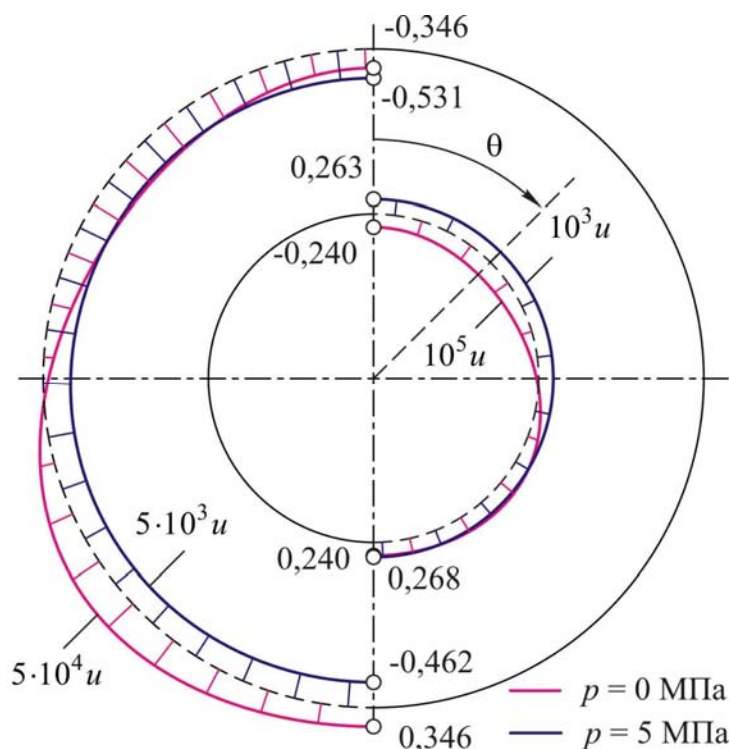


Рисунок 1.8 – Перемещения (м) точек свободной поверхности тяжелой сферы

В другом частном случае, когда при определении напряженно-деформированного состояния можно пренебречь вкладом массовых сил, из полученных уравнений следует классическое аналитическое решение задачи Ламе для трансверсально-изотропной сферы [41, 42]. Из этого решения при закреплении трансверсально-изотропной сферы по внешней поверхности и условии, что внутренняя граница свободна от нагрузок, следует тривиальный результат: нулевые напряжения и перемещения (рассматриваемое тело находится в ненапряженном состоянии).



## 1.5. Основные результаты и выводы главы

- Получены новые аналитические решения задач о равновесии трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной внешней или внутренней поверхностью соответственно;

- Записан явный вид коэффициентов частных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений для тяжелых изотропных сфер с закрепленной внешней границей, полученных ранее авторами [32];

- Проанализирован вклад массовых сил в распределение перемещений и независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел и монолитных железобетонных крепей сферических горных выработок, проведена оценка влияния толщины конструкции на характер этого распределения;

- На основе проведенного сравнения численных и аналитических решений показано, что для исключения ошибок, связанных с особенностями определения сферической системы координат в пакетах ANSYS и ABAQUS, реализующих метод конечных элементов, необходимо представлять результаты численных решений задач в трехмерной постановке в сферической системе координат для анизотропных центрально-симметричных тел, находящихся под действием осесимметричных нагрузок, в инвариантной форме.

## **ГЛАВА 2. РАВНОВЕСИЕ ТЯЖЕЛЫХ УПРУГИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СОСТАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ**

Результаты главы обобщают полученные выражения для перемещений, деформаций и напряжений в точках толстостенных тяжелых линейно упругих трансверсально-изотропных сфер на случай составных анизотропных тел с центральной симметрией, находящихся в равновесии в поле гравитационных сил. Получены новые аналитические решения задач о равновесии тяжелых упругих трансверсально-изотропных составных сфер, находящихся под действием равномерно распределенных давлений, с различными условиями закрепления на внутренней или внешней поверхности. В качестве приложения полученных решений описаны закономерности совместного деформирования монолитных железобетонных крепей сферических горных выработок и окружающего массива осадочных пород или сыпучих геосред, проведена оценка прочности по совокупности критериев.

### **2.1. Аналитическое решение задачи о равновесии составной упругой трансверсально-изотропной сферы при действии массовых сил**

Будем считать, что составная сфера представляет собой конструкцию, состоящую из двух полых толстостенных сфер с общим центром, ограничена сферическими поверхностями радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ), а поверхность контакта находится на расстоянии  $\rho_c$  от центра и не изменяет в силу малости деформаций свое положение в процессе нагружения. В центр поместим начало сферической ортогональной системы координат  $\rho$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ . Считаем, что материал обеих сфер линейно-упругий однородный, с постоянной плотностью по всему объему, сфери-

чески трансверсально-изотропный, относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра в данную точку. Все константы и функции, относящиеся к внутренней сфере, будем обозначать верхним индексом 1, а к внешней — индексом 2 соответственно, которые будут стоять в круглых скобках (рисунок 2.1).

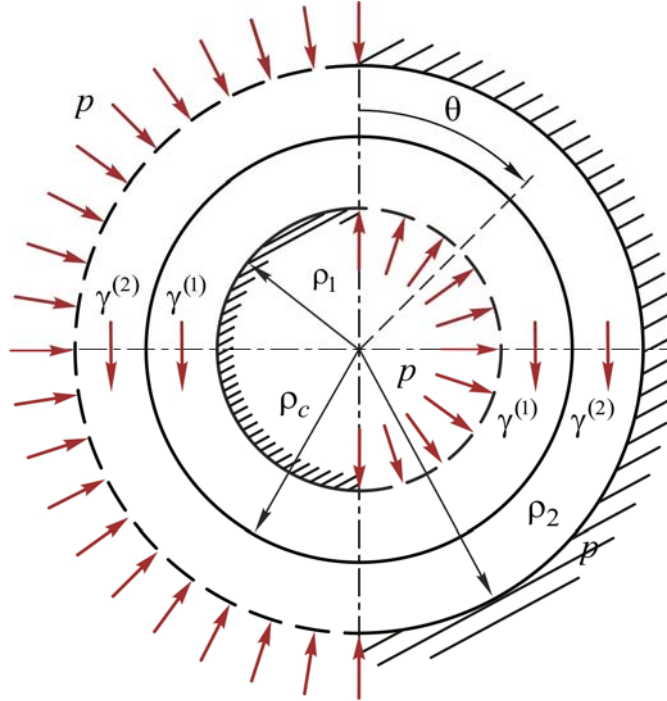


Рисунок 2.1 – Тяжелая трансверсально-изотропная составная сфера

Пусть на центрально-симметричное тело действует нагрузка, симметричная относительно вертикальной оси, проходящей через его геометрический центр, тогда радиальные и меридиональные перемещения ( $u_\rho^{(i)}$  и  $u_\theta^{(i)}$ ), радиальные ( $\sigma_{\rho\rho}^{(i)}$  и  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(i)}$ ), меридианальные ( $\sigma_{\theta\theta}^{(i)}$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}$ ), окружные ( $\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}$  и  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)}$ ) напряжения и деформации, касательные напряжения  $\tau_{\rho\theta}^{(i)}$  и сдвиговые деформации  $\varepsilon_{\rho\theta}^{(i)}$  не зависят (в силу симметрии тела и внешней нагрузки) от не зависят от окружной координаты  $\varphi$ .

Поэтому уравнения равновесия (1.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \left( 2\sigma_{\rho\rho}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)} + \tau_{\rho\theta}^{(i)} \operatorname{ctg} \theta \right) + F_\rho^{(i)} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \left[ \left( \sigma_{\theta\theta}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} \right) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}^{(i)} \right] + F_\theta^{(i)} = 0, \quad i = 1 \text{ или } 2.$$

Здесь  $F_\rho^{(i)} = -\gamma^{(i)} \cos \theta$  и  $F_\theta^{(i)} = \gamma^{(i)} \sin \theta$  — компоненты вектора массовых сил,  $\gamma^{(i)}$  — удельный вес материалов.

Определяющие соотношения (1.3) представленные в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(i)} &= A_{11}^{(i)} \varepsilon_{\rho\rho}^{(i)} + A_{12}^{(i)} (\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}), & \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} &= A_{12}^{(i)} \varepsilon_{\rho\rho}^{(i)} + A_{22}^{(i)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + A_{23}^{(i)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)} &= A_{12}^{(i)} \varepsilon_{\rho\rho}^{(i)} + A_{23}^{(i)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + A_{22}^{(i)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}, & \tau_{\rho\theta}^{(i)} &= 2A_{44}^{(i)} \varepsilon_{\rho\theta}^{(i)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

как и ранее, будут предполагать неизменность типа упругой симметрии для каждой части составной сферы. Здесь

$$\begin{aligned} m^{(i)} A_{11}^{(i)} &= \tilde{E}^{(i)} (1 - \nu^{(i)}), & m^{(i)} A_{12}^{(i)} &= E^{(i)} \tilde{\nu}^{(i)}, & A_{44}^{(i)} &= \tilde{G}^{(i)}, \\ A_{22}^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{(1 + \nu^{(i)}) m^{(i)}} \left( 1 - \tilde{\nu}^{(i)2} \frac{E^{(i)}}{\tilde{E}^{(i)}} \right), & A_{23}^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{(1 + \nu^{(i)}) m^{(i)}} \left( \nu^{(i)} + \tilde{\nu}^{(i)2} \frac{E^{(i)}}{\tilde{E}^{(i)}} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

а  $m^{(i)} = 1 - \nu^{(i)} - 2(\tilde{\nu}^{(i)})^2 E^{(i)} / \tilde{E}^{(i)}$ ;  $\tilde{E}^{(i)}$  и  $E^{(i)}$  — модули Юнга для растяжения вдоль  $\rho$  и в ортогональном к нему направлении;  $\tilde{G}^{(i)}$  — модуль сдвига для диаметральной плоскости;  $\tilde{\nu}^{(i)}$  и  $\nu^{(i)}$  — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечную деформацию в направлениях  $\theta$  и  $\varphi$  при растяжении вдоль радиальной координаты  $\rho$ , и в направлении  $\rho$  при растяжении в направлениях  $\theta$  и  $\varphi$  соответственно.

Последовательная подстановка геометрических соотношений Коши также записанных для каждой из частей составного тела

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho\rho}^{(i)} &= \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \rho}, & \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u_\rho^{(i)}}{\rho}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} &= \frac{u_\theta^{(i)}}{\rho} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_\rho^{(i)}}{\rho}, & \gamma_{\rho\theta}^{(i)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{u_\theta^{(i)}}{\rho} \end{aligned} \quad (2.4)$$

в определяющие (2.2), а затем полученного результата — в уравнения равновесия (2.1) позволяет записать неоднородные системы дифференциальных уравнений Ламе в частных производных

$$\begin{aligned}
 & A_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 u_\rho^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left[ 2A_{11}^{(i)} \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + \left( A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right) \left( \frac{\partial^2 u_\theta^{(i)}}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \theta \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{\rho^2} \left[ A_{44}^{(i)} \left( \frac{\partial^2 u_\rho^{(i)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + \left( A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)} - A_{44}^{(i)} \right) \left( \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta} + u_\theta^{(i)} \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\
 & \left. + 2 \left( A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)} \right) u_\rho^{(i)} \right] = \gamma^{(i)} \cos \theta,
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 & A_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left[ 2A_{44}^{(i)} \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \rho} + \left( A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right) \frac{\partial^2 u_\rho^{(i)}}{\partial \rho \partial \theta} \right] + \frac{1}{\rho^2} \left[ A_{22}^{(i)} \left( \frac{\partial^2 u_\theta^{(i)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\
 & \left. + \left( A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)} \right) \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \theta} - \left( A_{23}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)} + A_{22}^{(i)} \operatorname{ctg}^2 \theta \right) u_\theta^{(i)} \right] = -\gamma^{(i)} \sin \theta,
 \end{aligned}$$

решение которых в силу симметрии задачи может быть представлено в виде рядов [4, 5, 7, 117]:

$$u_\rho^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\rho n}^{(i)}(\rho) P_n(\cos \theta), \quad u_\theta^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\theta n}^{(i)}(\rho) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \quad (2.6)$$

по полиномам Лежандра, подстановка которых в выражения (2.5) и последующее приравнивание коэффициентов левых и правых частей уравнений при одинаковых функциях аргумента  $\theta$  позволяет получить бесконечное число систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$a_{1n}^{(i)} u_{\rho n}''^{(i)} + a_{2n}^{(i)} \frac{1}{\rho} u_{\rho n}'^{(i)} + a_{3n}^{(i)} \frac{1}{\rho^2} u_{\rho n}^{(i)} + a_{4n}^{(i)} \frac{1}{\rho} u_{\theta n}'^{(i)} + a_{5n}^{(i)} \frac{1}{\rho^2} u_{\theta n}^{(i)} = A_n^{(i)}, \quad (2.7)$$

$$b_{1n}^{(i)} u_{\theta n}''^{(i)} + b_{2n}^{(i)} \frac{1}{\rho} u_{\theta n}'^{(i)} + b_{3n}^{(i)} \frac{1}{\rho^2} u_{\theta n}^{(i)} + b_{4n}^{(i)} \frac{1}{\rho} u_{\rho n}'^{(i)} + b_{5n}^{(i)} \frac{1}{\rho^2} u_{\rho n}^{(i)} = B_n^{(i)},$$

где  $a_{1n}^{(i)} = A_{11}^{(i)}, \quad a_{2n}^{(i)} = 2A_{11}^{(i)}, \quad a_{3n}^{(i)} = 2 \left( A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)} \right) - A_{44}^{(i)} (n^2 + n),$

$$a_{4n}^{(i)} = \left( A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right) (n^2 + n), \quad a_{5n}^{(i)} = \left( A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)} - A_{44}^{(i)} \right) (n^2 + n),$$

$$b_{1n}^{(i)} = A_{44}^{(i)}, \quad b_{2n}^{(i)} = 2A_{44}^{(i)}, \quad b_{3n}^{(i)} = -A_{23}^{(i)} - 2A_{44}^{(i)} - A_{22}^{(i)} (n^2 + n - 1),$$

$$b_{4n}^{(i)} = - \left( A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right), \quad b_{5n}^{(i)} = - \left( A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)} \right),$$

$$A_n^{(i)} = \begin{cases} \gamma^{(i)}, & n=1, \\ 0, & n=0, n>1; \end{cases} \quad B_n^{(i)} = \begin{cases} -\gamma^{(i)}, & n=1, \\ 0, & n=0, n>1. \end{cases}$$

Определение перемещений в точках тяжелой толстостенной анизотропной составной сферы сводится к решению  $n$  самостоятельных задач (2.7), каждая из которых должна быть дополнена граничными условиями. Для этого необходимо разложить в ряды по полиномам Лежандра заданные на границах тела перемещения, напряжения или их комбинации, отражающие условия закрепления и приложенные нагрузки.

Решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (2.5) могут быть получены при реализации последовательности подстановок и преобразований, которые были ранее описаны в параграфе 1.1. Поэтому окончательные выражения для радиальных и меридиональных перемещений запишем следующим образом

$$\begin{aligned}
 u_{\rho}^{(i)} &= C_{10}^{(i)} \rho^{-1/2-k^{(i)}} + C_{20}^{(i)} \rho^{-1/2+k^{(i)}} + \\
 &+ \left( x_1^{(i)} C_{11}^{(i)} + x_2^{(i)} C_{21}^{(i)} \rho^{-1} + x_3^{(i)} C_{31}^{(i)} \rho^{-1/2+t^{(i)}} + x_4^{(i)} C_{41}^{(i)} \rho^{-1/2-t^{(i)}} + H_{\rho}^{(i)} \rho^2 \right) \cos \theta + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left( x_{1n}^{(i)} C_{1n}^{(i)} \rho^{\lambda_{1n}^{(i)}} + x_{2n}^{(i)} C_{2n}^{(i)} \rho^{\lambda_{2n}^{(i)}} + x_{3n}^{(i)} C_{3n}^{(i)} \rho^{\lambda_{3n}^{(i)}} + x_{4n}^{(i)} C_{4n}^{(i)} \rho^{\lambda_{4n}^{(i)}} \right) P_n(\cos \theta), \\
 u_{\theta}^{(i)} &= \left( C_{11}^{(i)} + C_{21}^{(i)} \rho^{-1} + C_{31}^{(i)} \rho^{-1/2+t^{(i)}} + C_{41}^{(i)} \rho^{-1/2-t^{(i)}} + H_{\theta}^{(i)} \rho^2 \right) \sin \theta + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left( C_{1n}^{(i)} \rho^{\lambda_{1n}^{(i)}} + C_{2n}^{(i)} \rho^{\lambda_{2n}^{(i)}} + C_{3n}^{(i)} \rho^{\lambda_{3n}^{(i)}} + C_{4n}^{(i)} \rho^{\lambda_{4n}^{(i)}} \right) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь, как и прежде

$$\begin{aligned}
 k^{(i)} &= \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \frac{A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} - A_{12}^{(i)}}{A_{11}^{(i)}}}, \\
 t^{(i)} &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{2(A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} - A_{12}^{(i)})}{A_{11}^{(i)}} + \frac{A_{11}^{(i)}(A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)}) - 2A_{12}^{(i)}(A_{12}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)})}{A_{11}^{(i)} A_{44}^{(i)}}}
 \end{aligned}$$

являются показателями анизотропии для центрально-симметричного тела, находящегося под действием равномерно распределенных центрально-симметричной и вертикальной осесимметричной нагрузки, а

$$x_{11}^{(i)} = -1, \quad x_{21}^{(i)} = \frac{A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)}}{A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)} - A_{44}^{(i)}},$$

$$x_{3_1}^{(i)} = \frac{A_{44}^{(i)} \left[ A_{12}^{(i)} - 2 \left( A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} \right) - 3A_{44}^{(i)} + 2 \left( A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right) t^{(i)} \right]}{2 \left( A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right)^2 - A_{11}^{(i)} \left( A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)} \right)},$$

$$x_{4_1}^{(i)} = \frac{A_{44}^{(i)} \left[ A_{12}^{(i)} - 2 \left( A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} \right) - 3A_{44}^{(i)} - 2 \left( A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right) t^{(i)} \right]}{2 \left( A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right)^2 - A_{11}^{(i)} \left( A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)} \right)},$$

$$H^{(i)} H_{\rho}^{(i)} = \left( A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} - 2A_{12}^{(i)} - 2A_{44}^{(i)} \right) \gamma^{(i)},$$

$$H^{(i)} H_{\theta}^{(i)} = \left( 2A_{11}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)} - 2A_{44}^{(i)} \right) \gamma^{(i)},$$

$$H^{(i)} = 2 \left[ A_{11}^{(i)} \left( A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} - 4A_{44}^{(i)} \right) + 2A_{44}^{(i)} \left( A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} - 3A_{12}^{(i)} \right) - 2A_{12}^{(i)2} \right].$$

Входящие в уравнения (2.8) характеристические числа  $\lambda_{j_n}^{(i)}$  ( $j = \{1, 2, 3, 4\}$ ) должны быть вычислены по отдельности для внутренней (4 числа при  $i = 1$ ) и внешней (4 числа при  $i = 2$ ) составной части сферы. Эти характеристические числа определяются для каждого  $n > 1$  из решения нелинейного уравнения четвертой степени:

$$\left[ \lambda_n^{(i)} \left( \lambda_n^{(i)} + 1 \right) + \beta_{3n}^{(i)} \right] \left[ \lambda_n^{(i)} \left( \lambda_n^{(i)} + 1 \right) + \alpha_{3n}^{(i)} \right] = \left( \alpha_{4n}^{(i)} \lambda_n^{(i)} + \alpha_{5n}^{(i)} \right) \left( \beta_{4n}^{(i)} \lambda_n^{(i)} + \beta_{5n}^{(i)} \right),$$

$$x_{j_n}^{(i)} = \frac{\lambda_{j_n}^{(i)} \left( \lambda_{j_n}^{(i)} + 1 - \alpha_{4n}^{(i)} \right) + \beta_{3n}^{(i)} - \alpha_{5n}^{(i)}}{\lambda_{j_n}^{(i)} \left( \lambda_{j_n}^{(i)} + 1 - \beta_{4n}^{(i)} \right) + \alpha_{3n}^{(i)} - \beta_{5n}^{(i)}},$$

где  $\alpha_{j_n}^{(i)} = a_{j_n}^{(i)} / a_{1_n}^{(i)}$  и  $\beta_{j_n}^{(i)} = b_{j_n}^{(i)} / b_{1_n}^{(i)}$ .

Постоянные интегрирования  $C_{1_0}^{(i)}$  и  $C_{2_0}^{(i)}$  определяются из граничных условий для краевой задачи, соответствующей  $n = 0$ ; константы  $C_{1_1}^{(i)}$ ,  $C_{2_1}^{(i)}$ ,  $C_{3_1}^{(i)}$  и  $C_{4_1}^{(i)}$  — из граничных условий краевой задачи при  $n = 1$ , а постоянные  $C_{1_n}^{(i)}$ ,  $C_{2_n}^{(i)}$ ,  $C_{3_n}^{(i)}$  и  $C_{4_n}^{(i)}$  — из граничных условий краевых задач, записанных для каждого  $n > 1$ . Обратим внимание на то, что при  $n = 0$  и  $n > 1$  системы дифференциальных уравнений однородны и имеют тривиальные решения:  $u_{\rho n}^{(i)} = 0$  и  $u_{\theta n}^{(i)} = 0$ , если граничные условия, разложенные в ряды по полиномам Лежандра при  $n = 0$  и  $n > 1$ , также однородны.

## 2.2. Равновесие тяжелой упругой составной трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внешней поверхностью

Рассмотрим задачу о равновесии составного центрально-симметричного тела с жестко закрепленной внешней поверхностью (правая часть сферы на рисунке 2.1), находящейся под действием массовых сил и равномерного внутреннего давления  $p$ . Будем считать, что на неизменной в процессе деформирования сферической границе контакта и находящейся на расстоянии  $\rho_c$  от центра, выполняются условия идеального сопряжения:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_c} &= u_{\rho}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_c}, & u_{\theta}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_c} &= u_{\theta}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_c}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_c} &= \tau_{\rho\theta}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_c}, & \sigma_{\rho\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_c} &= \sigma_{\rho\rho}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_c}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как и ранее будем предполагать, что материал обеих составных частей линейно-упругий однородный, с постоянной плотностью по всему объему, сферически трансверсально-изотропный, относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра в рассматриваемую точку.

Так как граничные условия на контактной (2.9), внешней и внутренней поверхности (ограничены радиусами  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , проведенными из общего центра):

$$u_{\rho}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad u_{\theta}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_1} = -p, \quad (2.10)$$

не нарушают осевой симметрии задачи, то ее решение может быть получено с помощью метода, описанного в параграфе 2.1.

Дополним каждую из неоднородных систем дифференциальных уравнений (2.7) при  $n = 0, 1, 2, \dots$  граничными условиями (2.9) и (2.10), разложенными в ряды по меридиональной координате  $\theta$ .

Константы интегрирования для  $n = 0$ , входящие в слагаемые выражений (2.8), вычисляются при решении системы четырех линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_2^{-1/2-k^{(2)}} C_{10}^{(2)} + \rho_2^{-1/2+k^{(2)}} C_{20}^{(2)} &= 0, \\ \rho_c^{-1/2-k^{(1)}} C_{10}^{(1)} + \rho_c^{-1/2+k^{(1)}} C_{20}^{(1)} &= \rho_c^{-1/2-k^{(2)}} C_{10}^{(2)} + \rho_c^{-1/2+k^{(2)}} C_{20}^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$



$$\begin{aligned}
 & C_{1_0}^{(1)} \left[ A_{11}^{(1)} \left( -1/2 - k^{(1)} \right) + 2A_{12}^{(1)} \right] \rho_1^{-3/2-k^{(1)}} + \\
 & + C_{2_0}^{(1)} \left[ A_{11}^{(1)} \left( -1/2 + k^{(1)} \right) + 2A_{12}^{(1)} \right] \rho_1^{-3/2+k^{(1)}} = -p \\
 & C_{1_0}^{(1)} \left[ A_{11}^{(1)} \left( -1/2 - k^{(1)} \right) + 2A_{12}^{(1)} \right] \rho_c^{-\frac{3}{2}-k^{(1)}} + C_{2_0}^{(1)} \left[ A_{11}^{(1)} \left( -1/2 + k^{(1)} \right) + 2A_{12}^{(1)} \right] \rho_c^{-\frac{3}{2}+k^{(1)}} = \\
 & = C_{1_0}^{(2)} \left[ A_{11}^{(2)} \left( -1/2 - k^{(2)} \right) + 2A_{12}^{(2)} \right] \rho_c^{-\frac{3}{2}-k^{(2)}} + C_{2_0}^{(2)} \left[ A_{11}^{(2)} \left( -1/2 + k^{(2)} \right) + 2A_{12}^{(2)} \right] \rho_c^{-\frac{3}{2}+k^{(2)}}
 \end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Z_0^{(\alpha)} &= 4A_{11}^{(\beta)} B^{(\alpha)} k^{(\beta)} \rho_\beta^{2k^{(\beta)}} - b_+^{(\beta)} c^{(\beta)} \left( b_-^{(\beta)} c^{(\alpha)} + B^{(\alpha)} \right), \quad (2.12) \\
 C_{1_0}^{(1)} Z_0^{(2)} &= 2p \rho_c^{2k^{(1)}} \rho_1^{3/2+k^{(1)}} \left( b_-^{(1)} c^{(2)} + B^{(2)} \right), \\
 C_{2_0}^{(1)} Z_0^{(2)} &= -2p \rho_1^{3/2+k^{(1)}} \left( b_+^{(1)} c^{(2)} + B^{(2)} \right), \\
 C_{1_0}^{(2)} Z_0^{(2)} &= -8A_{11}^{(1)} p k^{(1)} \rho_c^{k^{(1)}+k^{(2)}} \rho_1^{3/2+k^{(1)}} \rho_2^{2k^{(2)}}, \\
 C_{2_0}^{(2)} Z_0^{(2)} &= 8A_{11}^{(1)} p k^{(1)} \rho_c^{k^{(1)}+k^{(2)}} \rho_1^{3/2+k^{(1)}}, \\
 c^{(\alpha)} &= \rho_c^{2k^{(\alpha)}} - \rho_\alpha^{2k^{(\alpha)}}, \quad B^{(\alpha)} = b_+^{(\alpha)} \rho_\alpha^{2k^{(\alpha)}} - b_-^{(\alpha)} \rho_c^{2k^{(\alpha)}}, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \alpha = 2, \\ 2, & \alpha = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$b_+^{(\alpha)} = 4A_{12}^{(\alpha)} - A_{11}^{(\alpha)} \left( 1 + 2k^{(\alpha)} \right), \quad b_-^{(\alpha)} = 4A_{12}^{(\alpha)} - A_{11}^{(\alpha)} \left( 1 - 2k^{(\alpha)} \right).$$

При  $n=1$  постоянные интегрирования находятся из решения восьми линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 -C_{1_1}^{(2)} + x_2^{(2)} C_{2_1}^{(2)} \rho_2^{-1} + x_3^{(2)} C_{3_1}^{(2)} \rho_2^{-1/2+t^{(2)}} + x_4 C_{4_1}^{(2)} \rho_2^{-1/2-t^{(2)}} &= -H_\rho^{(2)} \rho_2^2, \quad (2.13) \\
 C_{1_1}^{(2)} + C_{2_1}^{(2)} \rho_2^{-1} + C_{3_1}^{(2)} \rho_2^{-1/2+t^{(2)}} + C_{4_1}^{(2)} \rho_2^{-1/2-t^{(2)}} &= -H_\theta^{(2)} \rho_2^2, \\
 2C_{2_1}^{(1)} \left( x_2^{(1)} + 2 \right) \rho_1^{1/2+t^{(1)}} + C_{3_1}^{(1)} \left( 2x_3^{(1)} - 2t^{(1)} + 3 \right) \rho_1^{1+2t^{(1)}} + \\
 + C_{4_1}^{(1)} \left( 2x_4^{(1)} + 2t^{(1)} + 3 \right) \rho_1 &= 2 \left( H_\theta^{(1)} - H_\rho^{(1)} \right) \rho_1^{7/2+t^{(1)}}, \\
 2C_{2_1}^{(1)} \left[ 2A_{12}^{(1)} \left( x_2^{(1)} + 1 \right) - A_{11}^{(1)} x_2^{(1)} \right] \rho_1^{1/2+t^{(1)}} + C_{3_1}^{(1)} \left[ 4A_{12}^{(1)} \left( x_3^{(1)} + 1 \right) + A_{11}^{(1)} x_3^{(1)} \left( 2t^{(1)} - 1 \right) \right] \rho_1^{1+2t^{(1)}} + \\
 + C_{4_1}^{(1)} \left[ 4A_{12}^{(1)} \left( x_4^{(1)} + 1 \right) - A_{11}^{(1)} x_4^{(1)} \left( 2t^{(1)} + 1 \right) \right] \rho_1 &= -4 \left[ H_\rho^{(1)} \left( A_{11}^{(1)} + A_{12}^{(1)} \right) + H_\theta^{(1)} A_{12}^{(1)} \right] \rho_1^{7/2+t^{(1)}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -C_{1_1}^{(1)} + x_2^{(1)} C_{2_1}^{(1)} \rho_c^{-1} + x_3^{(1)} C_{3_1}^{(1)} \rho_c^{-1/2+t^{(1)}} + x_4 C_{4_1}^{(1)} \rho_c^{-1/2-t^{(1)}} + H_\rho^{(1)} \rho_c^2 = \\
 & = -C_{1_1}^{(2)} + x_2^{(2)} C_{2_1}^{(2)} \rho_c^{-1} + x_3^{(2)} C_{3_1}^{(2)} \rho_c^{-1/2+t^{(2)}} + x_4 C_{4_1}^{(2)} \rho_c^{-1/2-t^{(2)}} + H_\rho^{(2)} \rho_c^2, \\
 & C_{1_1}^{(1)} + C_{2_1}^{(1)} \rho_c^{-1} + C_{3_1}^{(1)} \rho_c^{-1/2+t^{(1)}} + C_{4_1}^{(1)} \rho_c^{-1/2-t^{(1)}} + H_\theta^{(1)} \rho_c^2 = \\
 & = C_{1_1}^{(2)} + C_{2_1}^{(2)} \rho_c^{-1} + C_{3_1}^{(2)} \rho_c^{-1/2+t^{(2)}} + C_{4_1}^{(2)} \rho_c^{-1/2-t^{(2)}} + H_\theta^{(2)} \rho_c^2, \\
 & C_{3_1}^{(1)} \left[ 4A_{12}^{(1)} (x_3^{(1)} + 1) + A_{11}^{(1)} x_3^{(1)} (2t^{(1)} - 1) \right] \rho_c^{\frac{1}{2}+t^{(1)}} + 2C_{2_1}^{(1)} \left[ 2A_{12}^{(1)} (x_2^{(1)} + 1) - A_{11}^{(1)} x_2^{(1)} \right] + \\
 & + C_{4_1}^{(1)} \left[ 4A_{12}^{(1)} (x_4^{(1)} + 1) - A_{11}^{(1)} x_4^{(1)} (2t^{(1)} + 1) \right] \rho_c^{\frac{1}{2}-t^{(1)}} + 4 \left[ H_\rho^{(1)} (A_{11}^{(1)} + A_{12}^{(1)}) + H_\theta^{(1)} A_{12}^{(1)} \right] \rho_c^3 = \\
 & = 2C_{2_1}^{(2)} \left[ 2A_{12}^{(2)} (x_2^{(2)} + 1) - A_{11}^{(2)} x_2^{(2)} \right] + C_{3_1}^{(2)} \left[ 4A_{12}^{(2)} (x_3^{(2)} + 1) + A_{11}^{(2)} x_3^{(2)} (2t^{(2)} - 1) \right] \rho_c^{\frac{1}{2}+t^{(2)}} + \\
 & + C_{4_1}^{(2)} \left[ 4A_{12}^{(2)} (x_4^{(2)} + 1) - A_{11}^{(2)} x_4^{(2)} (2t^{(2)} + 1) \right] \rho_c^{\frac{1}{2}-t^{(2)}} + 4 \left[ H_\rho^{(2)} (A_{11}^{(2)} + A_{12}^{(2)}) + H_\theta^{(2)} A_{12}^{(2)} \right] \rho_c^3, \\
 & 2 \left[ C_{2_1}^{(1)} A_{44}^{(1)} (x_2^{(1)} + 2) - C_{2_1}^{(2)} A_{44}^{(2)} (x_2^{(2)} + 2) \right] + \\
 & + C_{3_1}^{(1)} A_{44}^{(1)} (2x_3^{(1)} - 2t^{(1)} + 3) \rho_c^{1/2+t^{(1)}} + 2A_{44}^{(1)} (H_\rho^{(1)} - H_\theta^{(1)}) \rho_c^3 + \\
 & + A_{44}^{(1)} C_{4_1}^{(1)} (2x_4^{(1)} + 2t^{(1)} + 3) \rho_c^{1/2-t^{(1)}} = C_{3_1}^{(2)} A_{44}^{(2)} (2x_3^{(2)} - 2t^{(2)} + 3) \rho_c^{1/2+t^{(2)}} + \\
 & + 2A_{44}^{(2)} (H_\rho^{(2)} - H_\theta^{(2)}) \rho_c^3 + A_{44}^{(2)} C_{4_1}^{(2)} (2x_4^{(2)} + 2t^{(2)} + 3) \rho_c^{1/2-t^{(2)}},
 \end{aligned}$$

но не приводятся ввиду их громоздкости.

При  $n > 1$  из-за однородности граничных условий все слагаемые, стоящие под знаком суммы в (2.8), обращаются в ноль:  $u_{\rho n}^{(i)} = 0$  и  $u_{\theta n}^{(i)} = 0$ .

В частном случае из уравнений (2.8) с постоянными (2.12) и дополнительно определенными из решения системы (2.13) коэффициентами  $C_{1_1}^{(i)}$ ,  $C_{2_1}^{(i)}$ ,  $C_{3_1}^{(i)}$  и  $C_{4_1}^{(i)}$ , которые соответствуют граничным условиям (2.9) и (2.10), следует решение краевой задачи о равновесии тяжелой составной изотропной сферы, жестко закрепленной по внешней поверхности и находящейся под действием равномерного внутреннего давления  $p$ . Для записи этого решения необходимо провести замену:

$$\tilde{E}^{(i)} = E^{(i)}, \quad \tilde{\nu}^{(i)} = \nu^{(i)}, \quad \tilde{G}^{(i)} = G^{(i)} = E^{(i)} / \left[ 2(1 + \nu^{(i)}) \right] \quad (2.14)$$

в соотношениях (2.3) для каждой из частей составной центрально-симметричной конструкции.

Учитывая то, что при замене (2.14) показатели анизотропии принимают значения  $k^{(i)} = 3/2$  и  $t^{(i)} = 5/2$ , а коэффициенты  $x_1^{(i)} = -1$  и  $x_4^{(i)} = 2$ , получим выражения для перемещений

$$u_\theta^{(i)} = \left( C_{1_1}^{(i)} + C_{2_1}^{(i)} \rho^{-1} + C_{3_1}^{(i)} \rho^2 + C_{4_1}^{(i)} \rho^{-3} + H_\theta^{(i)} \rho^2 \right) \sin \theta, \quad (2.15)$$

$$u_\rho^{(i)} = C_{1_0}^{(i)} \rho^{-2} + C_{2_0}^{(i)} \rho + \left( -C_{1_1}^{(i)} + x_2^{(i)} C_{2_1}^{(i)} \rho^{-1} + x_3^{(i)} C_{3_1}^{(i)} \rho^2 + 2C_{4_1}^{(i)} \rho^{-3} + H_\rho^{(i)} \rho^2 \right) \cos \theta,$$

$$H_\rho^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)}(1 - \nu^{(i)})}{3E^{(i)}}, \quad H_\theta^{(i)} = -\frac{2\gamma^{(i)}\nu^{(i)}}{3E^{(i)}}, \quad x_2^{(i)} = \frac{4(1 - \nu^{(i)})}{4\nu^{(i)} - 3}, \quad x_3^{(i)} = \frac{4\nu^{(i)} - 1}{2\nu^{(i)} - 3}.$$

Постоянные интегрирования, входящие в (2.15), представимы в виде:

$$C_{1_0}^{(1)} Z_0^{(2)} = 2p\rho_c^3 \rho_1^3 \left( b_-^{(1)} c^{(2)} + B^{(2)} \right), \quad C_{2_0}^{(1)} Z_0^{(2)} = -2p\rho_1^3 \left( b_+^{(1)} c^{(2)} + B^{(2)} \right),$$

$$C_{1_0}^{(2)} Z_0^{(2)} = -12A_{11}^{(1)} p\rho_c^3 \rho_1^3 \rho_2^3, \quad C_{2_0}^{(2)} Z_0^{(2)} = 12A_{11}^{(1)} p\rho_c^3 \rho_1^3,$$

$$Z_0^{(\alpha)} = 6A_{11}^{(\beta)} B^{(\alpha)} \rho_\beta^3 - b_+^{(\beta)} c^{(\beta)} \left( b_-^{(\beta)} c^{(\alpha)} + B^{(\alpha)} \right),$$

$$c^{(\alpha)} = \rho_c^3 - \rho_\alpha^3, \quad B^{(\alpha)} = b_+^{(\alpha)} \rho_\alpha^3 - b_-^{(\alpha)} \rho_c^3,$$

$$b_+^{(\alpha)} = -4E^{(\alpha)} / (1 + \nu^{(\alpha)}), \quad b_-^{(\alpha)} = 2E^{(\alpha)} / (1 - 2\nu^{(\alpha)}),$$

$$A_{11}^{(\alpha)} = \frac{E^{(\alpha)} (1 - \nu^{(\alpha)})}{(1 + \nu^{(\alpha)})(1 - 2\nu^{(\alpha)})}, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \alpha = 2, \\ 2, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Особый интерес представляет случай, в котором закрепленная по внешней поверхности тяжелая составная изотропная сфера со свободной от нагрузок внутренней поверхностью (отсутствует внутреннее давление) находится в равновесии. При этом формулы (2.15) при  $p = 0$  несколько упрощаются и совпадают с уравнениями, полученными автором [34]. Однако, учитывая соотношения между константами для трансверсально-изотропного материала в

рассматриваемом частном случае, представим коэффициенты любого частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.5), записанной при  $n=1$ , в виде:  $H_\rho^{(i)} = \gamma^{(i)}(1-\nu^{(i)})/(3E^{(i)})$  и  $H_\theta^{(i)} = -2\gamma^{(i)}\nu^{(i)}/(3E^{(i)})$ . Это принципиально невозможно было сделать ранее авторам [34].

### 2.3. Равновесие тяжелой упругой составной трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью

Рассмотрим равновесие находящейся под действием массовых сил и внешнего равномерного давления  $p$  составной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью (левая часть сферы на рисунке 2.1). Как и прежде, считаем, что составная сфера состоит из двух частей — центрально-симметричных тел с общим центром, в который поместим начало сферической ортогональной системы координат  $\rho$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ , ограничена внутренней и внешней поверхностями с постоянными радиусами  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ). Поэтому на этих поверхностях составной сферы будут заданы условия:

$$u_\rho^{(1)}\Big|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad u_\theta^{(1)}\Big|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(2)}\Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(2)}\Big|_{\rho=\rho_2} = -p. \quad (2.16)$$

Будем предполагать, что поверхность контакта частей составной сферы с реализуемыми на ней условиями идеального сопряжения (2.9) находится на расстоянии  $\rho_c$  от центра, а ее расположение не изменяется (в силу малости деформаций) в процессе нагружения. Если также предположить, что сферически трансверсально-изотропный материал обеих составных частей линейно упругий однородный, с постоянной плотностью по всему объему, также не изменяющий тип симметрии в процессе нагружения, то решение задачи о равновесии составной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью может быть получено с помощью метода, описанного в параграфе 2.1.

Используя (2.6) для разложения граничных условий (2.16) и условий идеального сопряжения (2.9) в ряды, определим постоянные интегрирования

общих решений неоднородных систем дифференциальных уравнений (2.7) для всех слагаемых суммы (2.8), которые, по сути, для каждого  $n$  являются решениями самостоятельных краевых задач.

Из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.11), в которой первые два равенства из четырех необходимо заменить на

$$\begin{aligned} \rho_1^{-1/2-k^{(1)}} C_{10}^{(1)} + \rho_1^{-1/2+k^{(1)}} C_{20}^{(1)} &= 0, \\ C_{10}^{(2)} \left[ A_{11}^{(2)} \left( -1/2 - k^{(2)} \right) + 2A_{12}^{(2)} \right] \rho_2^{-3/2-k^{(2)}} + \\ + C_{20}^{(2)} \left[ A_{11}^{(2)} \left( -1/2 + k^{(2)} \right) + 2A_{12}^{(2)} \right] \rho_2^{-3/2+k^{(2)}} &= -p, \end{aligned}$$

определяются для  $n = 0$  четыре константы  $C_{10}^{(i)}$  и  $C_{20}^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} C_{10}^{(1)} &= -\rho_1^{2k^{(1)}} C_{20}^{(1)}, \quad C_{20}^{(1)} Z_0^{(1)} = 8A_{11}^{(2)} p k^{(2)} \rho_c^{k^{(1)+k^{(2)}}} \rho_2^{3/2+k^{(2)}}, \quad (2.17) \\ C_{10}^{(2)} Z_0^{(1)} &= 2p \rho_c^{2k^{(2)}} \rho_2^{3/2+k^{(2)}} \left( b_-^{(2)} c^{(1)} + B^{(1)} \right), \\ C_{20}^{(2)} Z_0^{(1)} &= -2p \rho_2^{3/2+k^{(2)}} \left( b_+^{(2)} c^{(1)} + B^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Замена первых четырех из восьми линейных алгебраических уравнений системы (2.13) на выражения:

$$\begin{aligned} -C_{11}^{(1)} + x_2^{(1)} C_{21}^{(1)} \rho_1^{-1} + x_3^{(1)} C_{31}^{(1)} \rho_1^{-1/2+t^{(1)}} + x_4 C_{41}^{(1)} \rho_1^{-1/2-t^{(1)}} &= -H_\rho^{(1)} \rho_1^2, \quad (2.18) \\ C_{11}^{(1)} + C_{21}^{(1)} \rho_1^{-1} + C_{31}^{(1)} \rho_1^{-1/2+t^{(1)}} + C_{41}^{(1)} \rho_1^{-1/2-t^{(1)}} &= -H_\theta^{(1)} \rho_1^2, \\ 2C_{21}^{(2)} \left[ 2A_{12}^{(2)} \left( x_2^{(2)} + 1 \right) - A_{11}^{(2)} x_2^{(2)} \right] \rho_2^{1/2+t^{(2)}} + C_{31}^{(2)} \left[ 4A_{12}^{(2)} \left( x_3^{(2)} + 1 \right) + A_{11}^{(2)} x_3^{(2)} \left( 2t^{(2)} - 1 \right) \right] \rho_2^{1+2t^{(2)}} + \\ + C_{41}^{(2)} \left[ 4A_{12}^{(2)} \left( x_4^{(2)} + 1 \right) - A_{11}^{(2)} x_4^{(2)} \left( 2t^{(2)} + 1 \right) \right] \rho_2 &= -4 \left[ H_\rho^{(2)} \left( A_{11}^{(2)} + A_{12}^{(2)} \right) + H_\theta^{(2)} A_{12}^{(2)} \right] \rho_2^{7/2+t^{(2)}}, \\ 2C_{21}^{(2)} \left( x_2^{(2)} + 2 \right) \rho_2^{1/2+t^{(2)}} + C_{31}^{(2)} \left( 2x_3^{(2)} - 2t^{(2)} + 3 \right) \rho_2^{1+2t^{(2)}} + \\ + C_{41}^{(2)} \left( 2x_4^{(2)} + 2t^{(2)} + 3 \right) \rho_2 &= 2 \left( H_\theta^{(2)} - H_\rho^{(2)} \right) \rho_2^{7/2+t^{(2)}} \end{aligned}$$

позволяет вычислить восемь постоянных  $C_{11}^{(i)}, C_{21}^{(i)}, C_{31}^{(i)}$  и  $C_{41}^{(i)}$ , входящих в (2.8) при  $n=1$ . Константы интегрирования в остальных слагаемых выражений для радиальных и меридиональных перемещений (2.8) будут нулевыми в силу

однородности систем дифференциальных уравнений (2.7) и граничных условий (2.16) при всех  $n > 1$ , в результате чего  $u_{\rho n}^{(i)} = 0$  и  $u_{\theta n}^{(i)} = 0$ .

В практически важном частном случае замена материальных констант (2.14) в равенствах (2.3) для каждой из частей составного центрально-симметричного тела, а также подстановка значений для показателей анизотропии  $k^{(i)} = 3/2$ ,  $t^{(i)} = 5/2$  и коэффициентов  $x_1^{(i)} = -1$  и  $x_4^{(i)} = 2$  позволяет записать выражения для меридиональных и радиальных перемещений толстостенной тяжелой изотропной составной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью, находящейся в равновесии под действием равномерного внешнего давления  $p$ , в виде равенств (2.15) с константами интегрирования  $C_{10}^{(i)}$  и  $C_{20}^{(i)}$ , соответствующими (2.17). Оставшиеся постоянные  $C_{11}^{(i)}$ ,  $C_{21}^{(i)}$ ,  $C_{31}^{(i)}$  и  $C_{41}^{(i)}$  является решением системы (2.18) и не приводится ввиду их громоздкости.

#### **2.4. Многокритериальная оценка прочности монолитных железобетонных крепей сферических горных выработок, находящихся в массиве осадочных или сыпучих пород**

В качестве примера использования полученных аналитических решений проанализируем вклад массовых сил в напряженное состояние монолитных железобетонных крепей и окружающего сферические подземные выработки массива осадочных пород и проведем оценку прочности на основе многокритериального подхода [1, 2].

Предположим, что на некотором расстоянии от сферической крепи в породном массиве существует поверхность, перемещениями точек которой в радиальном, окружном и меридиональном направлении можно пренебречь. Тогда, рассматривая совместное деформирование монолитной крепи сферической горной выработки и окружающего массива осадочных пород, воспользуемся полученным в параграфе 2.2 решением для определения полей напряжений и перемещений.

Для этого подставим уравнения (2.8) с константами, определенными из (2.11) и (2.13), в геометрические соотношения (2.4) и получим компоненты тензора деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} &= C_{10}^{(i)} \rho^{-3/2-k^{(i)}} + C_{20}^{(i)} \rho^{-3/2+k^{(i)}} + \left[ (1+x_2^{(i)}) C_{21}^{(i)} \rho^{-2} + \right. \\ &+ \left. (1+x_3^{(i)}) C_{31}^{(i)} \rho^{-3/2+t^{(i)}} + (1+x_4^{(i)}) C_{41}^{(i)} \rho^{-3/2-t^{(i)}} + (H_\rho^{(i)} + H_\theta^{(i)}) \rho \right] \cos \theta, \\ \varepsilon_{\rho\rho}^{(i)} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[ C_{10}^{(i)} (1+2k^{(i)}) \rho^{-3/2-k^{(i)}} + C_{20}^{(i)} (1-2k^{(i)}) \rho^{-3/2+k^{(i)}} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[ 2x_2^{(i)} C_{21}^{(i)} \rho^{-2} + (1-2t^{(i)}) x_3^{(i)} C_{31}^{(i)} \rho^{-3/2+t^{(i)}} + (1+2t^{(i)}) x_4^{(i)} C_{41}^{(i)} \rho^{-3/2-t^{(i)}} - 4H_\rho^{(i)} \rho \right] \cos \theta \right\}, \\ \gamma_{\rho\theta}^{(i)} &= -\left[ \left( 2+x_2^{(i)} \right) C_{21}^{(i)} \rho^{-2} + \left( \frac{3}{2} + x_3^{(i)} - t^{(i)} \right) C_{31}^{(i)} \rho^{-3/2+t^{(i)}} + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{3}{2} + x_4^{(i)} + t^{(i)} \right) C_{41}^{(i)} \rho^{-3/2-t^{(i)}} + (H_\rho^{(i)} - H_\theta^{(i)}) \rho \right] \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.19)$$

Дальнейшая подстановка (2.19) в определяющие уравнения (2.2) позволяет записать компоненты тензора напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(i)} &= \frac{1}{2} \rho^{-3/2-k^{(i)}} \left\{ C_{10}^{(i)} \left[ 4A_{12}^{(i)} - A_{11}^{(i)} (1+2k^{(i)}) \right] + C_{20}^{(i)} \left[ 4A_{12}^{(i)} - A_{11}^{(i)} (1-2k^{(i)}) \right] \rho^{2k^{(i)}} \right\} + \\ &+ \left\{ 2A_{12}^{(i)} \left[ (1+x_2^{(i)}) C_{21}^{(i)} \rho^{-2} + (1+x_3^{(i)}) C_{31}^{(i)} \rho^{-3/2+t^{(i)}} + (1+x_4^{(i)}) C_{41}^{(i)} \rho^{-3/2-t^{(i)}} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (H_\rho^{(i)} + H_\theta^{(i)}) \rho \right] - \frac{1}{2} A_{11}^{(i)} \left[ 2x_2^{(i)} C_{21}^{(i)} \rho^{-2} + (1-2t^{(i)}) x_3^{(i)} C_{31}^{(i)} \rho^{-3/2+t^{(i)}} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1+2t^{(i)}) x_4^{(i)} C_{41}^{(i)} \rho^{-3/2-t^{(i)}} - 4H_\rho^{(i)} \rho \right] \right\} \cos \theta, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} = \sigma_{\theta\theta}^{(i)} &= \frac{1}{2} \rho^{-3/2-k^{(i)}} \left\{ C_{10}^{(i)} \left[ 2(A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)}) - A_{12}^{(i)} (1+2k^{(i)}) \right] + \right. \\ &+ C_{20}^{(i)} \left[ 2(A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)}) - A_{12}^{(i)} (1-2k^{(i)}) \right] \rho^{2k^{(i)}} \left. \right\} + \left\{ (A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)}) \left[ (1+x_2^{(i)}) C_{21}^{(i)} \rho^{-2} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1+x_3^{(i)}) C_{31}^{(i)} \rho^{-3/2+t^{(i)}} + (1+x_4^{(i)}) C_{41}^{(i)} \rho^{-3/2-t^{(i)}} + (H_\rho^{(i)} + H_\theta^{(i)}) \rho \right] - \frac{1}{2} A_{12}^{(i)} \left[ 2x_2^{(i)} C_{21}^{(i)} \rho^{-2} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1-2t^{(i)}) x_3^{(i)} C_{31}^{(i)} \rho^{-3/2+t^{(i)}} + (1+2t^{(i)}) x_4^{(i)} C_{41}^{(i)} \rho^{-3/2-t^{(i)}} - 4H_\rho^{(i)} \rho \right] \right\} \cos \theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(i)} &= -A_{44}^{(i)} \left[ \left( 2+x_2^{(i)} \right) C_{21}^{(i)} \rho^{-2} + \left( \frac{3}{2} + x_3^{(i)} - t^{(i)} \right) C_{31}^{(i)} \rho^{-3/2+t^{(i)}} + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{3}{2} + x_4^{(i)} + t^{(i)} \right) C_{41}^{(i)} \rho^{-3/2-t^{(i)}} + (H_\rho^{(i)} - H_\theta^{(i)}) \rho \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Полученные аналитические выражения (2.20) для радиальных  $\sigma_{\rho\rho}^{(i)}$ , меридианальных  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} = \sigma_{\theta\theta}^{(i)}$  и касательных  $\tau_{\rho\theta}^{(i)}$  напряжений позволяют провести оценку прочности монолитных железобетонных крепей сферических горных выработок и окружающего породного массива на основе многокритериального подхода, описывающего различные механизмы разрушения [1, 2], и определить области, где это разрушение может быть инициировано.

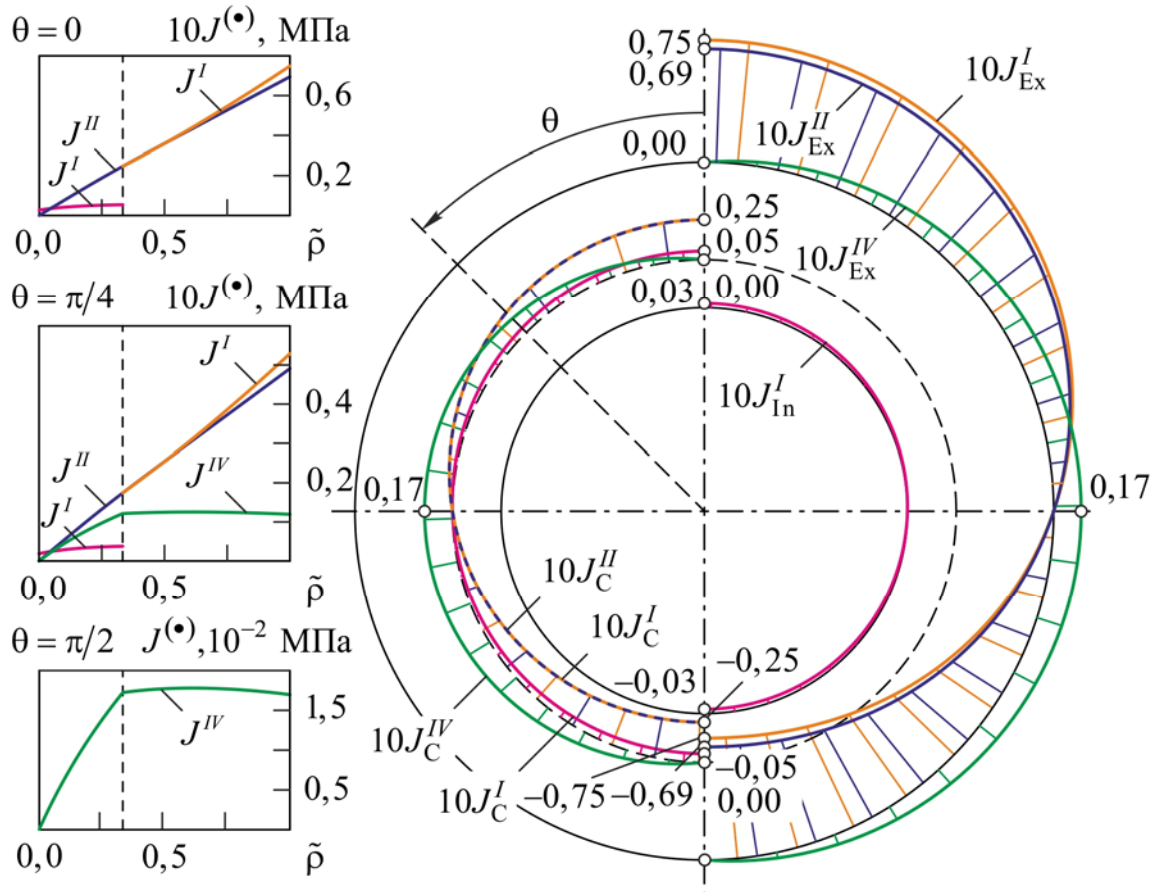


Рисунок 2.2 – Распределение инвариантов тензора напряжений (МПа) на закрепленной внешней ( $J_{Ex}^{(\bullet)}$ ), свободной от нагрузок внутренней ( $J_{In}^{(\bullet)}$ ) и контактной ( $J_C^{(\bullet)}$ ) поверхностях

На рисунке 2.2 и рисунке 2.3 представлены распределения ненулевых независимых инвариантов тензора напряжений в объединенных механических системах — массивах осадочных пород ( $E = 55,0$  ГПа,  $\tilde{E} = 23,0$  ГПа,  $\tilde{G} = 29,0$  ГПа,  $\nu = 0,29$ ,  $\tilde{\nu} = 0,32$  и  $\gamma = 27$  кН/м<sup>3</sup>) и тяжелых железобетонных крепях ( $E = 40,0$  ГПа,  $\tilde{E} = 25,0$  ГПа,  $\tilde{G} = 11$  ГПа,  $\nu = 0,075$ ,  $\tilde{\nu} = 0,15$  и  $\gamma = 40$  кН/м<sup>3</sup>)



сферических подземных горных выработок со свободной от давления внутренней поверхностью ( $p = 0$  МПа) вдоль обезразмеренной радиальной  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1) / (\rho_2 - \rho_1)$  и меридиональной координаты. Параметры геометрии геологических сооружений были выбраны следующими:  $\rho_1 = 2,5$  м,  $\rho_c = 3,1$  м,  $\rho_2 = 4,3$  м (рисунок 2.2) и  $\rho_2 = 9,0$  м (рисунок 2.3).

На внутренней поверхности монолитной железобетонной крепи, которая свободна от нагрузок, ненулевым является только первый инвариант  $J_\sigma^I$ . Этот инвариант нелинейно распределен вдоль координаты  $\tilde{\rho}$  и имеет скачок на поверхности контакта. Величина этого скачка возрастает по мере увеличения угла  $\theta$  (рисунки 2.2 и 2.3). Кроме того, при заданных материальных константах существенное влияние на характер распределения  $J_\sigma^I$  оказывает соотношение внешних радиусов железобетонной крепи и массива осадочных пород. Так, например, увеличение толщины окружающего массива приводит к смене знака первого инварианта в крепи (рисунок 2.3).

Второй инвариант  $J_\sigma^{II}$  непрерывен на границе раздела крепи и массива осадочных пород. Этот инвариант при изменении радиальной координаты от свободной поверхности к закрепленной всюду возрастает по абсолютной величине, не принимая при этом в точках верхнего свода отрицательных, а в нижней полусфере — положительных значений. Обращает на себя внимание снижение по абсолютной величине значений  $J_\sigma^{II}$  на границе контакта при увеличении размера окружающего породного массива (рисунок 2.3).

Поскольку в точках, принадлежащих вертикальной центральной оси,  $J_\sigma^I$  и  $J_\sigma^{II}$  достигают свои наибольшие по абсолютной величине значения, то в этих точках, лежащих на внешней поверхности железобетонной крепи, внутренней и внешней поверхности внешней сферы, моделирующей породный массив, может появиться область материала, потерявшая способность сопротивляться растяжению или сжатию в меридиональном и радиальном направлении.

Третий инвариант  $J_\sigma^{III}$  во всех точках железобетонной крепи и окружающего массива осадочных пород принимает нулевые значения: ( $\tau_{\varphi\theta} \equiv 0$ , а

при  $n=0$  и  $n=1$  имеет место равенство окружных и меридиональных напряжений ( $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$ ). Следовательно, при заданных условиях нагружения и типе упругой симметрии материалов механизмы разрушения от сдвига по поверхности изотропии не реализуются ни в точках, принадлежащих железобетонной крепи, ни окружающему ее породному массиву.

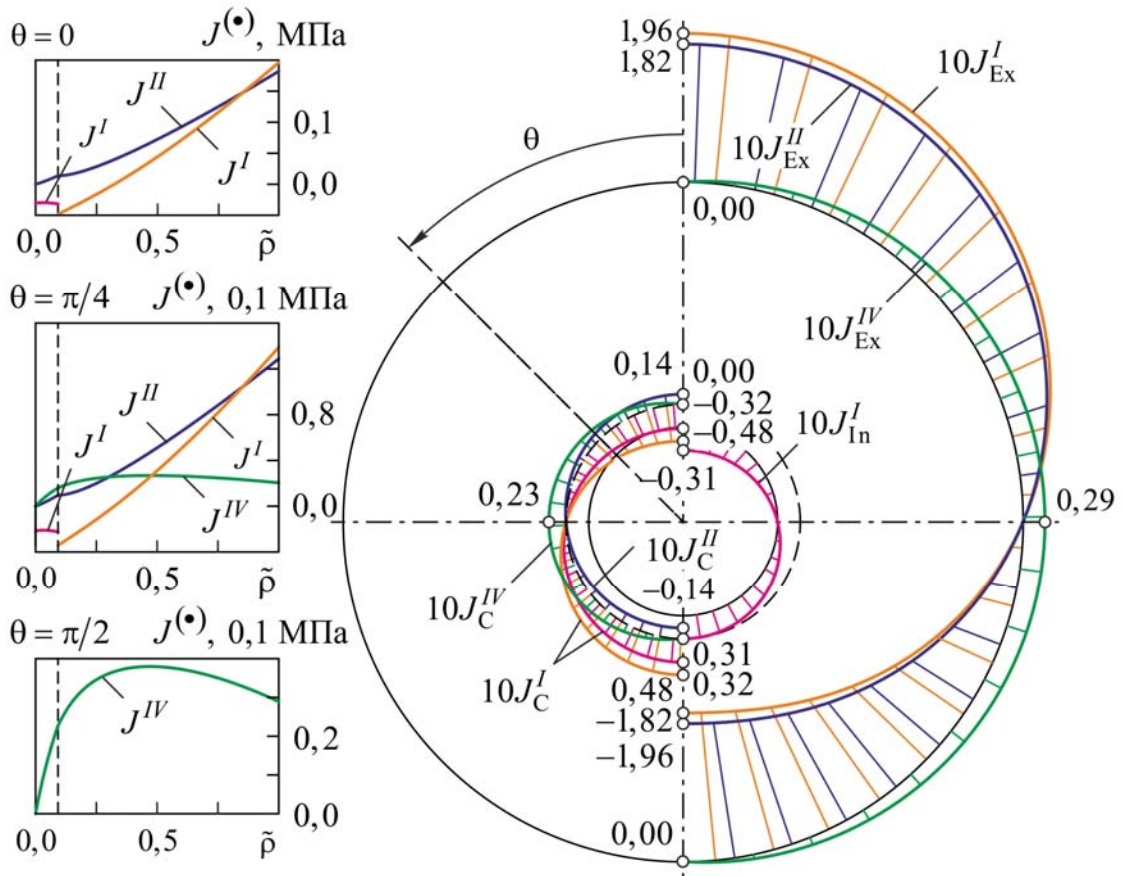


Рисунок 2.3 – Распределение инвариантов тензора напряжений (МПа) на закрепленной внешней ( $J_{Ex}^{(\bullet)}$ ), свободной от нагрузок внутренней ( $J_{In}^{(\bullet)}$ ) и контактной ( $J_C^{(\bullet)}$ ) поверхностях

В точках, расположенных на вертикальной диаметральной оси, четвертый инвариант  $J_{\sigma}^{IV}$  равен нулю. При заданном постоянном значении радиальной координаты  $\tilde{\rho}$ , не выходящей за пределы монолитной крепи,  $J_{\sigma}^{IV}$  возрастает по мере увеличения угла  $\theta$  в верхней полусфере и убывает в нижней, достигая своих максимальных значений при  $\theta = \pi/2$ . Кроме того, в радиальном направлении при изменении  $\tilde{\rho}$  от внутренней поверхности железобетонной крепи к поверхности

контакта с массивом горных пород  $J_{\sigma}^{IV}$  всюду монотонно возрастает от нулевых значений на свободной поверхности до максимальных на внешней. Поэтому наиболее опасными, с точки зрения возможности начала разрушения крепи по механизму межслойного сдвига, являются точки диаметральной горизонтальной плоскости, лежащие на границе контакта с горными породами.

В массиве осадочных пород четвертый инвариант  $J_{\sigma}^{IV}$  изменяется немонотонно при изменении  $\tilde{r}$  от внутренней поверхности к внешней. При заданных размерах и деформационных свойствах породного массива обнаруживает себя не зависящее от значения меридиональной координаты  $\theta$  (за исключением случая  $\theta = 0$ ) постоянство расположения точки максимума на расстоянии  $\tilde{r} = 0,61$ , если  $\rho_2 = 4,3$  м и  $\tilde{r} = 0,47$  при  $\rho_2 = 9,0$  м. Эта закономерность расположения точки максимума требует проведения дополнительного исследования. Полученный результат позволяет предположить, что область начального разрушения в массиве осадочных пород, вызванная межслойным сдвигом, будет иметь сферическую форму и располагаться на удалении от поверхности контакта с железобетонной крепью. Радиус этой области уменьшается при увеличении характерного размера породного массива.

На рисунке 2.4 проиллюстрировано влияние отношения толщины рассматриваемого массива осадочных пород к толщине монолитной железобетонной крепи  $\Delta = \delta_1/\delta_2$  ( $\delta_1 = \rho_c - \rho_1 = const$ ,  $\delta_2 = \rho_2 - \rho_c$ ) на характер распределения обезразмеренных ненулевых инвариантов  $\tilde{J}^{(\bullet)} = J^{(\bullet)}/(\gamma^{(1)}\rho_c)$  тензора напряжений в характерных сечениях монолитной крепи вдоль радиальной координаты  $\tilde{r}$ , показавшее, что с ростом  $\delta_2$  кривые  $J_{\sigma}^I$  и  $J_{\sigma}^{II}$  становятся все менее и менее пологими, а  $J_{\sigma}^{IV}$  уменьшают свой угол наклона. Значения первого и второго инвариантов тензора напряжений возрастают (по абсолютной величине), а значения  $J_{\sigma}^{IV}$  снижаются при изменении радиальной координаты  $\tilde{r}$  от внутренней, свободной от нагрузок поверхности к поверхности контакта крепи с породным массивом.

Если сделать другое предположение, что на некотором расстоянии от крепи осадочные породы контактируют с сыпучими средами — конгломератами частиц,

то будет существовать сферическая поверхность, перемещения точек которой ограничены только в радиальном направлении и неограниченны вдоль меридиональной координаты. В простейшем случае это перемещение может быть свободным (без трения), что будет также предполагать отсутствие касательных напряжений. Предположение о независимости перемещений, деформаций и напряжений от окружной координаты исключают из рассмотрения возможные движения и реакции в этом направлении, снимают необходимость записи критериальных условий (типа неравенств, задающих скольжение с трением), в которые должны входить некоторые пороговые значения. Поэтому для описания совместного деформирования монолитной крепи горной выработки и окружающего массива сыпучих осадочных пород, можем по прежнему рассматривать единую механическую систему, представляющую собой составную сферу, и воспользоваться изложенным в параграфе 2.1 методом определения полей перемещений.

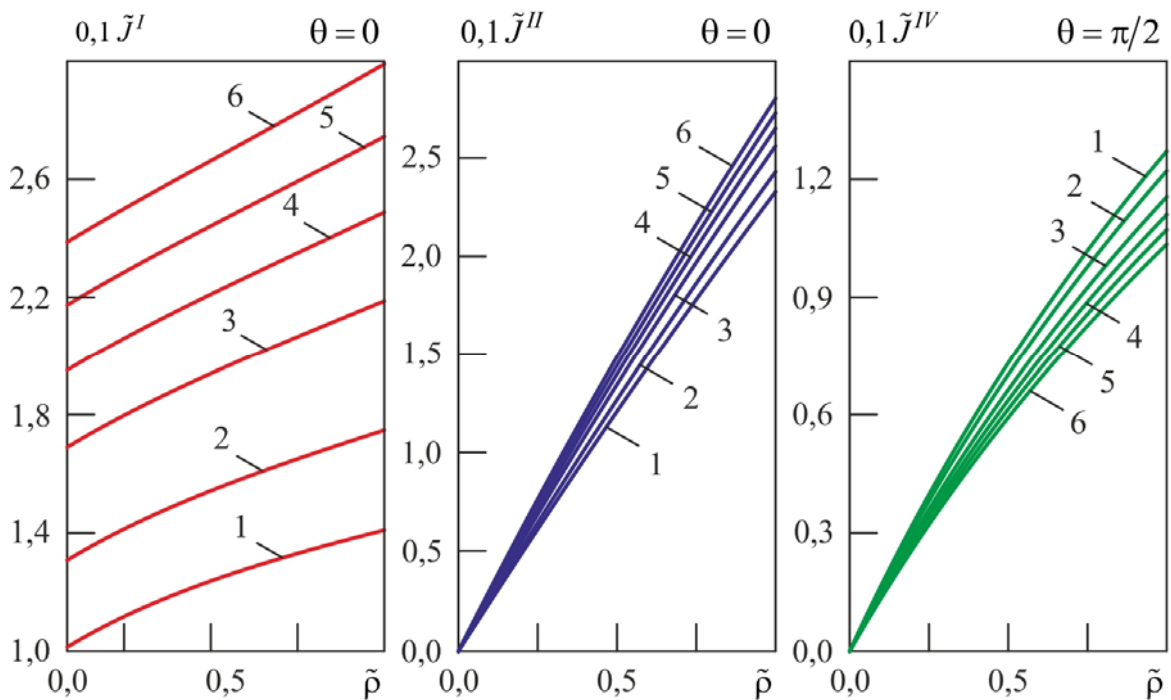


Рисунок 2.4 – Распределения  $J^{(\bullet)}$  в характерных сечениях монолитной железобетонной крепи: 1 –  $\Delta = 1$ , 2 –  $\Delta = 0,5$ , 3 –  $\Delta = 0,2$ , 4 –  $\Delta = 0,1$ , 5 –  $\Delta = 0,05$ , 6 –  $\Delta = 0,02$

Считаем, что составная сфера состоит из двух полых толстостенных частей с общим центром, ограничена сферическими поверхностями радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$

( $\rho_1 < \rho_2$ ). Как и ранее, будем предполагать, что геометрия поверхности контакта неизменна при деформировании. Эта поверхность с условиями идеального сопряжения (2.9) расположена на расстоянии  $\rho_c$  относительно центра. Материал сфер будем считать линейно-упругим, однородным, трансверсально-изотропным, имеющим постоянную по всему объему плотность.

В рассматриваемом случае граничные условия на внутренней и внешней поверхностях составного центрально-симметричного тела записываются следующим образом:

$$u_{\rho}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_1} = -p, \quad (2.21)$$

Эти условия, как и (2.9), не нарушают осевой симметрии задачи, что позволяет записать выражения для перемещений в точках составной конструкции в виде (2.6).

Общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.7) может быть записано в виде (2.8), а разложение граничных условий (2.21) и (2.9) с использованием (2.6) позволяет для всех слагаемых определить для каждого  $n$  постоянные интегрирования.

Для записи компонент тензоров деформаций и напряжений (2.19) и (2.20) необходимо определить постоянные интегрирования общего решения (2.8). Эти постоянные находятся при  $n=0$  из решения системы (2.11), а при  $n=1$  — из решения системы восьми линейных алгебраических уравнений (2.13), в которых второе уравнение необходимо заменить на равенство:

$$2C_{2_1}^{(2)} \left( x_2^{(2)} + 2 \right) \rho_2^{1/2+t^{(2)}} + C_{3_1}^{(2)} \left( 2x_3^{(2)} - 2t^{(2)} + 3 \right) \rho_2^{1+2t^{(2)}} + \\ + C_{4_1}^{(2)} \left( 2x_4^{(2)} + 2t^{(2)} + 3 \right) \rho_2 = 2 \left( H_{\theta}^{(2)} - H_{\rho}^{(2)} \right) \rho_2^{7/2+t^{(2)}}.$$

Для всех  $n > 1$  общие решения (2.8) в силу однородности граничных условий являются тривиальными, следовательно  $u_{\rho n}^{(i)} = 0$  и  $u_{\theta n}^{(i)} = 0$ , а значит нет необходимости отыскания постоянных интегрирования.

Проанализируем напряженное состояние монолитной железобетонной крепи ( $E = 40,0$  ГПа,  $\tilde{E} = 25,0$  ГПа,  $\tilde{G} = 11$  ГПа,  $\nu = 0,075$ ,  $\tilde{\nu} = 0,15$  и  $\gamma = 40$  кН/м<sup>3</sup>) сферической горной выработки, находящейся в массиве сыпучих осадочных пород

( $E = 55,0$  ГПа,  $\tilde{E} = 23,0$  ГПа,  $\tilde{G} = 29,0$  ГПа,  $\nu = 0,29$ ,  $\tilde{\nu} = 0,32$  и  $\gamma = 27$  кН/м<sup>3</sup>), и проведем многокритериальную оценку прочности. На рисунке 2.5 представлено распределение ненулевых инвариантов тензора напряжений  $J^{(\bullet)}$  и вдоль обезразмеренной радиальной  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$  и меридиональной координаты при следующих параметрах геометрии сооружения:  $\rho_1 = 2,5$  м,  $\rho_c = 3,1$  м и  $\rho_2 = 4,3$  м.

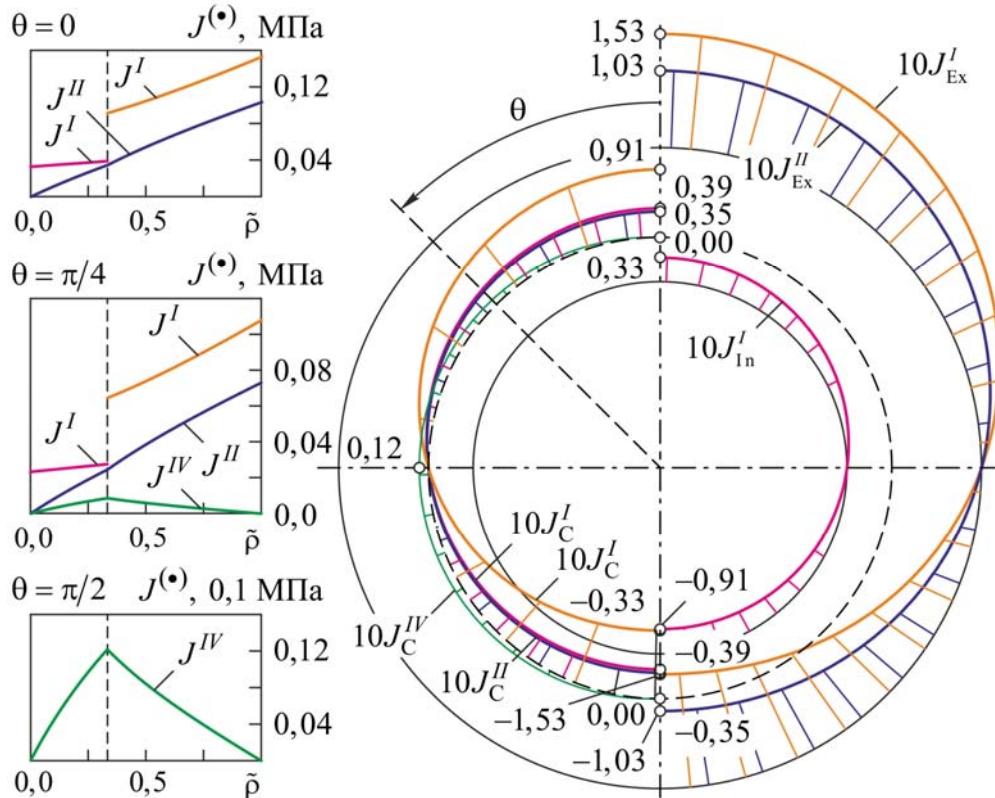


Рисунок 2.5 – Распределение инвариантов тензора напряжений (МПа) на внешней ( $J_{Ex}^{(\bullet)}$ ), внутренней ( $J_{In}^{(\bullet)}$ ) и контактной ( $J_C^{(\bullet)}$ ) поверхностях

На свободной от давления ( $p = 0$  МПа) внутренней поверхности железобетонной крепи ненулевым является только первый инвариант  $J_{\sigma}^I$ , который при зафиксированном постоянном значении меридиональной координаты  $\theta$  нелинейно распределен вдоль  $\tilde{\rho}$  (рисунок 2.5). Этот инвариант при изменении  $\tilde{\rho}$  от внутренней свободной поверхности к закрепленной внешней всюду возрастает по абсолютной величине и имеет скачок на границе контакта крепи и породного массива. Второй инвариант  $J_{\sigma}^{II}$  монотонно возрастает при увеличении радиальной координаты  $\tilde{\rho}$  в точках верхней полусферы, а в нижней

полусфере — монотонно убывает, не изменяя знак. Этот инвариант непрерывен на границе раздела крепи и массива осадочных пород.

Наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения крепи от растяжения или сжатия в меридиональном и радиальном направлениях являются точки, принадлежащие вертикальной диаметральной оси и границе контакта с сыпучими осадочными породами. Наиболее опасными для начала разрушения породного массива являются точки, лежащие на вертикальной центральной оси и внешней поверхности. В указанных выше точках первый  $J_{\sigma}^I$  и второй  $J_{\sigma}^{II}$  инварианты достигают свои наибольшие по абсолютной величине значения.

Как и в предыдущем случае при заданных условиях нагружения и типе упругой симметрии материала механизмы разрушения от сдвига по поверхности изотропии не реализуются, так как третий инвариант  $J_{\sigma}^{III}$  во всех точках железобетонной крепи и окружающего массива сыпучих осадочных пород принимает нулевые значения.

При заданном постоянном значении радиальной координаты четвертый инвариант  $J_{\sigma}^{IV}$  равен нулю в точках, расположенных на вертикальной диаметральной оси, возрастает по мере увеличения угла  $\theta$  в верхнем своде и убывает в нижних полусферах, достигая максимальных значений при  $\theta = \pi/2$ . В пределах железобетонной крепи в радиальном направлении при постоянном значении угла  $\theta$  изменение  $\tilde{r}$  от внутренней свободной от нагрузок поверхности к границе контакта сопровождается монотонным ростом  $J_{\sigma}^{IV}$  до точки максимума. В массиве сыпучих осадочных пород максимальные значения четвертого инварианта соответствуют точкам на границе контакта, а на внешней поверхности (из-за возможности скольжения без трения при ограничении радиальных перемещений)  $J_{\sigma}^{IV}$  принимает нулевые значения. Отмеченные закономерности позволяют сделать заключение о возможном появлении области не сопротивляющегося межслойному сдвигу материала монолитной крепи и осадочных пород вблизи контактной границы в диаметральной горизонтальной плоскости.

На рисунке 2.6 представлены зависимости, отражающие влияние отношения характерных размеров (толщины) массива осадочных пород и монолитной

железобетонной крепи  $\Delta = \delta_1/\delta_2$  ( $\delta_1 = \rho_c - \rho_1 = const$ ,  $\delta_2 = \rho_2 - \rho_c$ ) на характер распределения обезразмеренных ненулевых инвариантов  $\tilde{J} = J^{(\bullet)}/\gamma^{(1)}\rho_c$  тензора напряжений в характерных поперечных сечениях, выбранных вдоль радиальной координаты  $\tilde{\rho}$ .

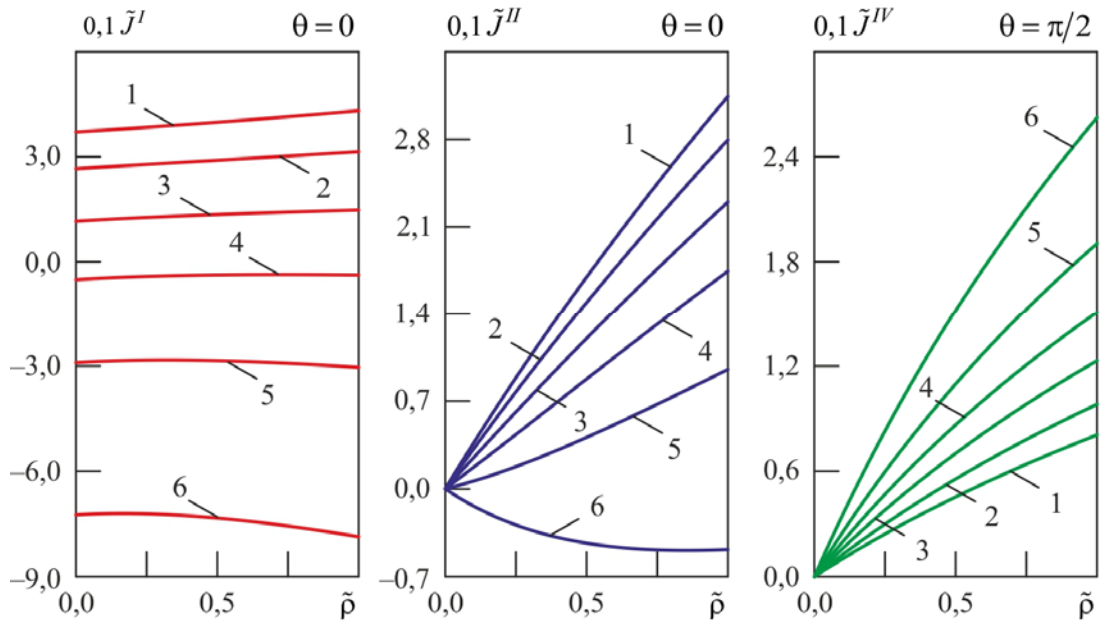


Рисунок 2.6 – Распределения  $\tilde{J}^{(\bullet)}$  в характерных сечениях монолитной железобетонной крепи: 1 –  $\Delta = 1$ , 2 –  $\Delta = 0,5$ , 3 –  $\Delta = 0,2$ , 4 –  $\Delta = 0,1$ , 5 –  $\Delta = 0,05$ , 6 –  $\Delta = 0,02$

С изменением  $\Delta$  характер распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях монолитных крепей изменяется и количественно, и качественно. Значения линейных инвариантов снижаются в точках свода с увеличением  $\delta_2$ . Причем при заданных материальных константах  $J_{\sigma}^I$  и  $J_{\sigma}^{II}$  нелинейно распределены вдоль радиальной координаты и меняют знак при увеличении толщины рассматриваемого породного массива. С увеличением  $\Delta$  значения четвертого инварианта снижаются, оставаясь максимальными на поверхности контакта монолитной крепи с окружающим массивом осадочных пород.



## 2.5. Основные результаты и выводы главы

- Получены новые аналитические решения задач о равновесии составных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, равномерных внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной внешней или внутренней поверхностью соответственно. Записаны в явном виде коэффициенты полученных ранее авторами [34] частных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений для тяжелых составных изотропных сфер с жестко закрепленной внешней границей;
- Записаны новые аналитические решения задач о равновесии составных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, при условии не полного (только в радиальном направлении) закрепления внешней или внутренней, поверхности, на которой реализуется идеальное скольжение без трения;
- Проанализирован вклад массовых сил, установлено качественное и количественное влияние размера окружающего массива, учитываемого при построении расчетной схемы для сферической выработки, и условий закрепления внешней поверхности на характер распределения независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях;
- Проведена оценка прочности монолитной железобетонной крепи сферической подземной выработки по совокупности критериев, показавшая наиболее опасные точки, в которых реализуются механизмы исчерпания несущей способности от растяжения или сжатия в радиальном и меридиональном направлении, а также разрушения по механизму межслойного сдвига.

### **ГЛАВА 3. РАВНОВЕСИЕ УПРУГИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СОСТАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ**

В главе получены аналитические решения задач о равновесии упругих толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений, которые позволили проанализировать влияние параметров анизотропии материала на характер распределения напряжений в сечениях составных центрально-симметричных конструкций сосудов давления. Представлены результаты для одного из возможных приложений полученных решений: выведены аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия дисперсно-упрочненного композита со сплошными и полыми трансверсально-изотропными сферическими включениями.

#### **3.1. Аналитическое решение задачи о равновесии упругой составной анизотропной сферы нагруженной внутренним и внешним давлением**

Рассмотрим более простой случай, когда при решении краевой задачи для составной сферы, находящейся в равновесии под действием равномерно распределенного внутреннего  $p_1$  и внешнего  $p_2$  давления, отсутствует необходимость учета массовых сил. Будем считать, что составная сфера представляет собой конструкцию, состоящую из двух полых толстостенных сфер с общим центром, в который поместим начало сферической ортогональной системы координат  $\rho, \theta, \varphi$ . Материал каждой из сфер однородный, сферически трансверсально-изотропный, относительно любого радиус-вектора, проведенного из общего центра в данную точку. Сфера ограничена сферическими поверхностями радиусами  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ), а поверхность контакта находится на расстоянии  $\rho_c$  от центра.

Как и прежде (глава 2), все константы и функции, относящиеся к внутренней сфере, в дальнейшем будем обозначать верхним индексом (1), а к внешней — индексом (2) соответственно, которые будут стоять в круглых скобках.

Так как само составное тело, действующая нагрузка и условия на границе сопряжения

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}\Big|_{\rho=\rho_1} = -p_1, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(2)}\Big|_{\rho=\rho_2} = -p_2, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(1)}\Big|_{\rho=\rho_c} = \sigma_{\rho\rho}^{(2)}\Big|_{\rho=\rho_c}, \quad u^{(1)}\Big|_{\rho=\rho_c} = u^{(2)}\Big|_{\rho=\rho_c} \quad (3.1)$$

центрально-симметричны, то будут отсутствовать сдвиги, а все точки будут перемещаться только в радиальном направлении  $\rho$  на величину  $u_\rho = u$ . При этом, очевидно, окружные и меридиональные перемещения  $u_\theta = u_\varphi \equiv 0$ . Поэтому поля деформаций и напряжений будут зависеть только от одной переменной  $\rho$ .

В силу симметрии задачи для каждой из сфер геометрические соотношения (2.4) и уравнения равновесия (2.1) преобразуются к следующему виду:

$$\varepsilon_{\rho\rho}^{(i)} = \frac{du^{(i)}}{d\rho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{u^{(i)}}{\rho}, \quad \gamma_{\theta\varphi}^{(i)} = \gamma_{\rho\varphi}^{(i)} = \gamma_{\rho\theta}^{(i)} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{d\sigma_{\rho\rho}^{(i)}}{d\rho} + \frac{2}{\rho}(\sigma_{\rho\rho}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}) = 0, \quad i = 1 \text{ или } 2. \quad (3.3)$$

Определяющие соотношения останутся неизменными (2.2), а входящие в них коэффициенты по прежнему будут определяться при помощи формул (2.3).

Решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, получаемого последовательной подстановкой геометрических соотношений (3.2) в определяющие (2.2), а затем в уравнение равновесия (3.3) является суммой двух первых слагаемых в выражении (2.8) для радиальных перемещений:

$$u^{(i)} = \rho^{-\frac{1}{2}-k^{(i)}} \left( C_1^{(i)} + C_2^{(i)} \rho^{2k^{(i)}} \right). \quad (3.4)$$

Выполнив подстановку (3.4) в (3.2) и (1.3) и, учитывая граничные условия (3.1), запишем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho_1^{-\frac{3}{2}-k^{(1)}} \left( C_1^{(1)} b_+^{(1)} + C_2^{(1)} b_-^{(1)} \rho_1^{2k^{(1)}} \right) &= -p_1, \\ \frac{1}{2}\rho_2^{-\frac{3}{2}-k^{(2)}} \left( C_1^{(2)} b_+^{(2)} + C_2^{(2)} b_-^{(2)} \rho_2^{2k^{(2)}} \right) &= -p_2, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\rho_c^{-\frac{3}{2}-k^{(1)}} \left( C_1^{(1)}b_+^{(1)} + C_2^{(1)}b_-^{(1)}\rho_c^{2k^{(1)}} \right) = \frac{1}{2}\rho_c^{-\frac{3}{2}-k^{(2)}} \left( C_1^{(2)}b_+^{(2)} + C_2^{(2)}b_-^{(2)}\rho_c^{2k^{(2)}} \right),$$

$$\rho_c^{-\frac{1}{2}-k^{(1)}} \left( C_1^{(1)} + \rho_c^{2k^{(1)}} C_2^{(1)} \right) = \rho_c^{-\frac{1}{2}-k^{(2)}} \left( C_1^{(2)} + \rho_c^{2k^{(2)}} C_2^{(2)} \right),$$

$$b_+^{(i)} = 4A_{12}^{(i)} - A_{11}^{(i)}(1 + 2k^{(i)}), \quad b_-^{(i)} = 4A_{12}^{(i)} - A_{11}^{(i)}(1 - 2k^{(i)}).$$

относительно  $C_1^{(1)}$ ,  $C_2^{(1)}$ ,  $C_1^{(2)}$ ,  $C_2^{(2)}$  и определим константы интегрирования:

$$C_1^{(\alpha)} = \frac{2\rho_c^{k^{(\alpha)}}\rho_\alpha^{k^{(\alpha)}}}{Z_\alpha} \left[ p_\alpha \rho_c^{k^{(\alpha)}} \rho_\alpha^{\frac{3}{2}} (s_\beta - g_\beta b_-^{(\alpha)}) - 4p_\beta A_{11}^{(\beta)} k^{(\beta)} b_-^{(\alpha)} \rho_c^{k^{(\beta)}} \rho_\alpha^{k^{(\alpha)}} \rho_\beta^{\frac{3}{2}+k^{(\beta)}} \right],$$

$$C_2^{(\alpha)} = \frac{2}{Z_\alpha} \left[ 4p_\beta A_{11}^{(\beta)} b_+^{(\alpha)} k^{(\beta)} \rho_c^{k^{(\alpha)}+k^{(\beta)}} \rho_\beta^{\frac{3}{2}+k^{(\beta)}} - p_\alpha \rho_\alpha^{\frac{3}{2}+k^{(\alpha)}} (s_\beta - g_\beta b_+^{(\alpha)}) \right],$$

где

$$c_\alpha = \rho_c^{2k^{(\alpha)}} - \rho_\alpha^{2k^{(\alpha)}}, \quad g_\alpha = b_+^{(\alpha)}\rho_c^{2k^{(\alpha)}} - b_-^{(\alpha)}\rho_\alpha^{2k^{(\alpha)}}, \quad s_\alpha = c_\alpha b_+^{(\alpha)}b_-^{(\alpha)},$$

$$Z_\alpha = (g_\beta s_\alpha - g_\alpha s_\beta), \quad \alpha = 1 \text{ или } 2, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \alpha = 2, \\ 2, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Это позволит записать радиальные перемещения и вычислить компоненты тензоров деформаций

$$\varepsilon_{\rho\rho}^{(i)} = -\frac{1}{2}\rho^{-\frac{3}{2}-k^{(i)}} \left[ C_1^{(i)}(1 + 2k^{(i)}) + C_2^{(i)}(1 - 2k^{(i)})\rho^{2k^{(i)}} \right], \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} = \rho^{-\frac{3}{2}-k^{(i)}} \left( C_1^{(i)} + C_2^{(i)}\rho^{2k^{(i)}} \right).$$

и напряжений

$$\sigma_{\rho\rho}^{(i)} = \frac{1}{2}\rho^{-\frac{3}{2}-k^{(i)}} \left( C_1^{(i)}b_+^{(i)} + C_2^{(i)}b_-^{(i)}\rho^{2k^{(i)}} \right), \quad (3.6)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{1}{2}\rho^{-\frac{3}{2}-k^{(i)}} \left( C_1^{(i)}B_+^{(i)} + C_2^{(i)}B_-^{(i)}\rho^{2k^{(i)}} \right),$$

$$B_+^{(i)} = 2Q^{(i)} - A_{12}^{(i)}(1 + 2k^{(i)}), \quad B_-^{(i)} = 2Q^{(i)} - A_{12}^{(i)}(1 - 2k^{(i)}),$$

$$Q^{(i)} = A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} = E^{(i)}/m^{(i)}.$$

Из полученного аналитического решения (3.4) – (3.6) для трансверсально-изотропной составной сферы можно получить в частном случае формулы для распределения радиальных перемещений, радиальных, окружных и меридиональных напряжений и деформаций в точках изотропной составной сферы. Для этого следует провести замену деформационных постоянных во всех выражениях следующим образом:

$$\tilde{E}^{(i)} = E^{(i)}, \quad \tilde{\nu}^{(i)} = \nu^{(i)}. \quad (3.7)$$

Тогда показатель анизотропии примет значение  $k^{(i)} = 3/2$ , а уравнения для перемещений, деформаций и напряжений преобразуются к виду:

$$u^{(i)} = \frac{1}{\rho^2} \left( C_1^{(i)} + C_2^{(i)} \rho^3 \right), \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{\rho\rho}^{(i)} = C_2^{(i)} - \frac{2}{\rho^3} C_1^{(i)}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{1}{\rho^3} C_1^{(i)} + C_2^{(i)}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(i)} = \frac{1}{2} \rho^{-3} \left( C_1^{(i)} b_+^{(i)} + C_2^{(i)} b_-^{(i)} \rho^3 \right), \quad (3.10)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{1}{2} \rho^{-3} \left( C_2^{(i)} b_-^{(i)} \rho^3 - \frac{1}{2} C_1^{(i)} b_+^{(i)} \right),$$

$$C_1^{(\alpha)} = \frac{2\rho_c^3 \rho_\alpha^3}{Z_\alpha} \left[ p_\alpha \left( c_\beta b_+^{(\beta)} b_-^{(\beta)} - g_\beta b_-^{(\alpha)} \right) - 6p_\beta A_{11}^{(\beta)} b_-^{(\alpha)} \rho_\beta^3 \right],$$

$$C_2^{(\alpha)} = \frac{2}{Z_\alpha} \left[ 6p_\beta A_{11}^{(\beta)} b_+^{(\alpha)} \rho_c^3 \rho_\beta^3 - p_\alpha \rho_\alpha^3 \left( c_\beta b_+^{(\beta)} b_-^{(\beta)} - b_+^{(\alpha)} g_\beta \right) \right],$$

$$c_\alpha = \rho_c^3 - \rho_\alpha^3, \quad g_\alpha = b_+^{(\alpha)} \rho_c^3 - b_-^{(\alpha)} \rho_\alpha^3, \quad \alpha = 1 \text{ или } 2,$$

$$b_+^{(\alpha)} = -4E^{(\alpha)} / (1 + \nu^{(\alpha)}), \quad b_-^{(\alpha)} = 2E^{(\alpha)} / (1 - 2\nu^{(\alpha)}),$$

$$A_{11}^{(\alpha)} = \frac{E^{(\alpha)} (1 - \nu^{(\alpha)})}{(1 + \nu^{(\alpha)})(1 - 2\nu^{(\alpha)})}, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \alpha = 2, \\ 2, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Если замену (3.7) провести в решении (3.4) – (3.6) только лишь в выражениях, записанных для одной из частей составной сферы, то будет получено еще два частных случая: решения задачи о равновесии составной центрально-симметричной конструкции, состоящей из изотропной внутренней

или внешней и сферически трансверсально-изотропной внешней или внутренней частей соответственно.

### 3.2. Влияние параметров анизотропии на напряженное состояние упругих составных сферических сосудов, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления

Полученные выражения для перемещений (3.4), деформаций (3.5) и напряжений (3.6) позволяют установить закономерности взаимного влияния внутренней и внешней частей составных сферических сосудов давления, обусловленные анизотропией материалов и величиной давления на поверхности контакта, провести многокритериальную оценку прочности.

На рисунке 3.1 и рисунке 3.2 представлены распределения ненулевых инвариантов тензора напряжений  $J_{\sigma}^{(\bullet)}$  в поперечных сечениях составных сосудов, находящихся под действием внутреннего  $p_1 = 1$  МПа и внешнего  $p_2 = 5$  МПа равномерных давлений, вдоль обезразмеренной радиальной координаты  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1) / (\rho_2 - \rho_1)$ , в зависимости от показателя анизотропии материала внутренней и внешней части соответственно. Предполагается, что  $\rho_1 = 3,0$  м,  $\rho_c = 4,7$  м,  $\rho_2 = 6,0$  м, а деформационные свойства:  $k^{(\alpha)} = 2,198$  ( $E^{(\alpha)} = 55$  ГПа,  $\tilde{E}^{(\alpha)} = 23$  ГПа,  $\nu^{(\alpha)} = 0,29$  и  $\tilde{\nu}^{(\alpha)} = 0,32$ ),  $k^{(\alpha)} = 2,349$  ( $E^{(\alpha)} = 55$  ГПа,  $\tilde{E}^{(\alpha)} = 20$  ГПа,  $\nu^{(\alpha)} = 0,29$  и  $\tilde{\nu}^{(\alpha)} = 0,32$ ),  $k^{(\alpha)} = 1,500$  ( $E^{(\alpha)} = 45$  ГПа,  $\tilde{E}^{(\alpha)} = 45$  ГПа,  $\nu^{(\alpha)} = 0,30$  и  $\tilde{\nu}^{(\alpha)} = 0,30$ ),  $k^{(\alpha)} = 1,060$  ( $E^{(\alpha)} = 23$  ГПа,  $\tilde{E}^{(\alpha)} = 55$  ГПа,  $\nu^{(\alpha)} = 0,32$  и  $\tilde{\nu}^{(\alpha)} = 0,29$ ) и  $k^{(\alpha)} = 1,005$  ( $E^{(\alpha)} = 20$  ГПа,  $\tilde{E}^{(\alpha)} = 55$  ГПа,  $\nu^{(\alpha)} = 0,32$  и  $\tilde{\nu}^{(\alpha)} = 0,29$ ) удовлетворяли условию положительности собственных значений оператора упругости

$$A_{22}^{(\alpha)} - A_{23}^{(\alpha)} > 0, \quad \frac{1}{2} \left( A_{11}^{(\alpha)} + A_{22}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)} \pm \sqrt{8A_{12}^{(\alpha)2} + (A_{22}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)} - A_{11}^{(\alpha)})^2} \right) > 0$$

для трансверсально-изотропного тела [118].

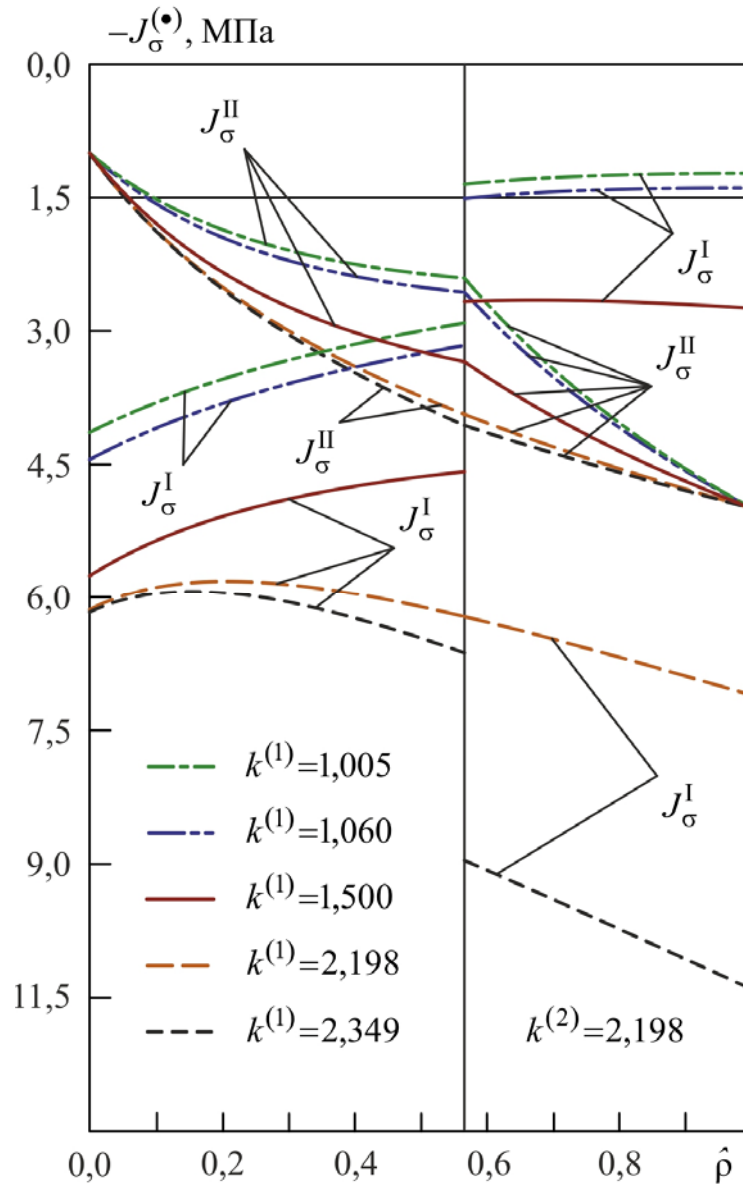


Рисунок 3.1 – Влияние показателя анизотропии материала внутренней части составных сферических сосудов на распределение инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях

Представленные на рисунке 3.1 и рисунке 3.2 результаты показывают влияние параметров анизотропии на характер распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях составных сферических сосудов давления. Так, например, увеличение показателя анизотропии (для изотропного материала  $k^{(i)} = 1,5$ ) материала внутренней части составного сосуда  $k^{(1)}$ , приводит к увеличению, по абсолютной величине, и первого  $J_{\sigma}^{(I)}$ , и второго  $J_{\sigma}^{(II)}$  инварианта

тензора напряжений. А увеличение показателя анизотропии материала внешней части  $k^{(2)}$  наоборот снижает по абсолютной величине  $J_{\sigma}^{(I)}$  и  $J_{\sigma}^{(II)}$ .

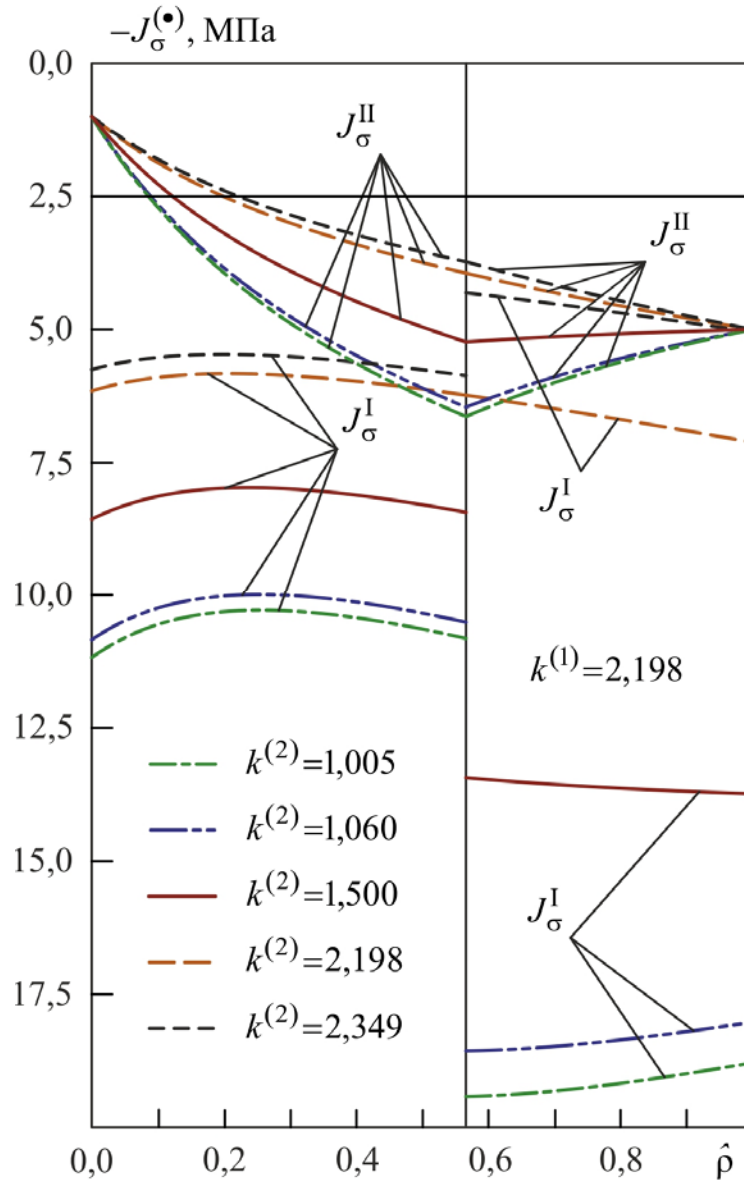


Рисунок 3.2 – Влияние показателя анизотропии материала внешней части составных сферических сосудов на распределение инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях

Оценка начальной прочности позволяет сделать вывод, что разрушение от растяжения или сжатия в радиальном направлении может начаться в точках внешней поверхности, на которую действует большее давление, а, соответственно, второй инвариант тензора напряжений  $J_{\sigma}^{(II)}$  имеет большее (по абсолютной величине) значение, либо на поверхности контакта, если показатель анизот-



ропии материала внутренней части составной сферы будет больше, чем у внешней. С точки зрения возможности начала разрушения от растяжения или сжатия в окружающем направлении наиболее опасными являются точки внешней, или контактной, поверхности при условии, что  $k^{(1)} \geq k^{(2)}$ , а при  $k^{(1)} < k^{(2)}$  — точки внутренней поверхности составной центрально-симметричной конструкции.

Обнаруженные закономерности влияния анизотропии материалов внутренней и внешней частей сферических сосудов давления свидетельствуют о возможности «управления» величинами и характером распределения напряжений при проектировании составных элементов конструкций, оптимально соответствующих заданным режимам эксплуатации. Это «управление», например, может быть реализовано только изменением схемы армирования анизотропного материала при сохранении свойств отдельных элементов структуры.

В частном случае, когда отдельные части изготовлены из одного и того же материала, составное центрально-симметричное тело можно рассматривать как однородную толстостенную сферу. Тогда на поверхности контакта, определяемой  $\rho_c$ , будут выполняться условия непрерывности для всех компонент тензора напряжений, а, следовательно, полученные соотношения будут соответствовать решению задачи Ламе для однородной толстостенной трансверсально-изотропной сферы, находящейся под действием распределенных внешнего  $p_2$  и внутреннего  $p_1$  давления [41, 42].

В процессе создания составных конструкций возникают собственные технологические напряжения  $\sigma_c$ , определение закона распределения которых в поперечных сечениях представляет самостоятельную задачу, выходящую за рамки настоящего исследования. Будем предполагать, что  $\sigma_c$  известны, имеют единственную, отличную от нуля, радиальную составляющую и равномерно распределены только на поверхности контакта. Остальные области составных частей трансверсально-изотропной сферы свободны от собственных напряжений.

Технологические напряжения имеют различную природу и могут быть вызваны не только различием в геометрии отдельных частей (натягом), но и особенностями процесса изготовления конструкции или сооружения. В случае,

если радиальное напряжение (давление натяга  $p_\delta$ ) на известной поверхности контакта обусловлено только разницей в геометрии внутренней и внешней сфер, то сумма перемещений на поверхности контакта должна быть равна величине натяга  $\delta$ :

$$u^{(2)}\Big|_{\rho=\rho_c} - u^{(1)}\Big|_{\rho=\rho_c} = \delta. \quad (3.11)$$

В случае отсутствия внешних силовых воздействий, которому соответствуют условия

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}\Big|_{\rho=\rho_1} = \sigma_{\rho\rho}^{(2)}\Big|_{\rho=\rho_2} = 0 \quad (3.12)$$

на внутренней и внешней поверхности составной сферы, на поверхности контакта, положение которой определяется  $\rho_c$ , возникает, вызванное разницей в геометрических размерах, давление, которое будем называть давлением натяга  $p_\delta$ . Тогда на этой поверхности будут иметь место условия:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}\Big|_{\rho=\rho_c} = \sigma_{\rho\rho}^{(2)}\Big|_{\rho=\rho_c} = -p_\delta, \quad (3.13)$$

Из (3.12) и (3.13) определим константы интегрирования в уравнениях для перемещений, деформаций и напряжений (которые записаны как функции радиальной координаты  $\rho$ ) для внутренней и внешней сфер. Последующая подстановка найденных постоянных в уравнение (3.4) и использование условия (3.11) позволяет записать выражение для давления натяга:

$$p_\delta = \frac{\delta}{2\rho_c} \left( b_+^{(1)} b_-^{(1)} b_+^{(2)} b_-^{(2)} c_1 c_2 \right) Z_2. \quad (3.14)$$

Определение полей напряжений в составной трансверсально-изотропной сфере, находящейся под действием внутреннего и внешнего давления, на контактной поверхности которой задано давление натяга, будет заключаться в суммировании решений рассмотренных выше задач в силу линейной упругости материала частей составного центрально-симметричного тела.

На рисунке 3.3 проиллюстрировано влияние технологического давления  $p_\delta$  равномерно распределенного по поверхности контакта на распределение ненуле-

вых инвариантов тензора напряжений  $J_{\sigma}^{(\bullet)}$  в поперечных сечениях составных трансверсально-изотропных сферических сосудов, находящихся под действием внутреннего  $p_1 = 1$  МПа и внешнего  $p_2 = 5$  МПа равномерных давлений, вдоль обезразмеренной радиальной координаты  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1) / (\rho_2 - \rho_1)$  при следующих геометрических параметрах:  $\rho_1 = 3,0$  м,  $\rho_c = 4,7$  м,  $\rho_2 = 6,0$  м и упругих материальных константах:  $E^{(\alpha)} = 55$  ГПа,  $\tilde{E}^{(\alpha)} = 23$  ГПа,  $\nu^{(\alpha)} = 0,29$ ,  $\tilde{\nu}^{(\alpha)} = 0,32$ .

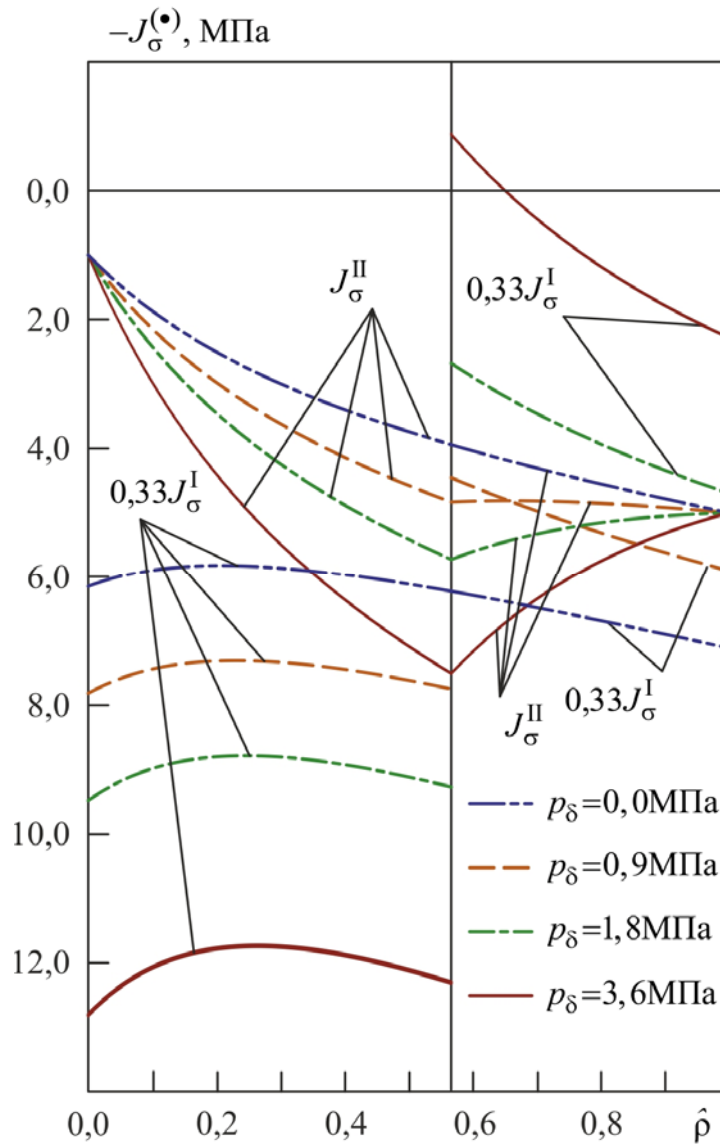


Рисунок 3.3 – Влияние величины технологического давления  $p_{\delta}$  на характер распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях составных сферических сосудов

С увеличением технологического давления натяга напряжения в радиальном направлении (второй инвариант  $J_{\sigma}^{II}$ ) возрастают вместе с

увеличением скачка первого инварианта  $J_{\sigma}^I$  на поверхности контакта. Кроме того, существенно меняется характер распределения напряжений в поперечных сечениях составных трансверсально-изотропных сферических сосудов: распределение становится более нелинейным. Это приводит к тому, что наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения могут стать точки не внешней (более нагруженной), а внутренней и/или контактной поверхности.

С точки зрения оценки прочности были выявлены следующие закономерности. Разрушение по механизму сжатия в меридиональном направлении может при  $p_{\delta} > 0,9$  МПа быть инициировано в точках, принадлежащих внутренней поверхности составной конструкции. Последнее имеет место, несмотря на то, что внешнее давление по абсолютной величине выше внутреннего и превосходит давление натяга. Точки составного сосуда давления, находящиеся на поверхности контакта, становятся наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения по механизму сжатия в радиальном направлении.

### **3.3. Определение эффективных упругих модулей дисперсно-упрочненного композита со сплошными и полыми анизотропными сферическими включениями**

Полученные в разделе 3.1 новые аналитические решения задач о равновесии составных толстостенных анизотропных упругих тел с центральной симметрией важны не только для разработки инженерных методик уточненного прочностного анализа элементов конструкций и сооружений, имеющих аналогичную геометрию и граничные условия, но также они позволяют в частном случае, когда величина натяга  $\delta = 0$ , прогнозировать эффективные свойства дисперсно-наполненных композитов с полыми и сплошными анизотропными сферическими включениями в рамках полидисперсных моделей механики.

Рассмотрим двухфазный композит, наполненный сплошными или полыми сферическими включениями различного диаметра. Придерживаясь гипотез полидисперсных моделей механики [47, 48], будем считать, что каждая

сферическая частица произвольного радиуса  $R_A$  окружена слоем матрицы толщиной  $R_B - R_A$ , таким образом, что отношения  $c = R_A/R_B$  для каждого армирующего элемента и  $h = R_0/R_A$  для каждого полого включения являются постоянными величинами. Кроме того, будем предполагать, что линейно упругая однородная матрица изотропна, а материал, из которого изготовлены включения – сферически трансверсально-изотропный (ось симметрии бесконечного порядка совпадает с осью  $\rho$  сферической ортогональной системы координат  $\rho, \theta$  и  $\varphi$  с началом в центре составной частицы).

Рассмотрим произвольное включение с неизменным типом упругой симметрии составных частей (частицы армирующего наполнителя и слоя матрицы), находящееся в состоянии однородного гидростатического растяжения, которое обеспечивается заданными на внешней поверхности равномерно распределенными радиальным давлением  $p$

$$\sigma_{\rho\rho}\Big|_{\rho=R_B} = p \quad (3.15)$$

или перемещением  $\xi$

$$u_\rho\Big|_{\rho=R_B} = \xi. \quad (3.16)$$

Используя аналитическое решение (3.4) – (3.6) и учитывая, что для внешней изотропной части уравнения принимают вид (3.8) – (3.10), запишем выражения для радиальных перемещений  $u_\rho$  и напряжений  $\sigma_{\rho\rho}$  в полом включении и окружающем слое матрицы

$$u_\rho^I = A_I \rho^{k^I - 1/2} + \frac{B_I}{\rho^{k^I + 1/2}}, \quad \sigma_{\rho\rho}^I = \frac{1}{2} \left( \rho^{k-3/2} A_I H_1 - \frac{B_I H_2}{\rho^{k+3/2}} \right), \quad (3.17)$$

$$H_1 = b_-^{(I)}, \quad H_2 = -b_+^{(I)}$$

$$u_\rho^M = A_M \rho + \frac{B_M}{\rho^2}, \quad \sigma_{\rho\rho}^M = 3K_M A_M - 4 \frac{G_M B_M}{\rho^3}, \quad (3.18)$$

где  $K_M$  и  $G_M$  – объемный и сдвиговой упругие модули. Здесь и далее все величины, относящиеся к включениям и матрице, будут отмечены индексами  $I$  и  $M$  соответственно.

Для дисперсно-упрочненного композита со сплошными включениями в уравнениях (3.17) исключаются слагаемые с  $B_I$ , наличие которых в решении приведет к сингулярности радиальных перемещений и напряжений в центре частиц армирующего наполнителя:

$$u_\rho^I = C_I \rho^{k-1/2}, \quad \sigma_{\rho\rho}^I = \frac{1}{2} \frac{C_I H_1}{\rho^{3/2-k}}. \quad (3.19)$$

Рассмотрим случай, когда на межфазной поверхности выполняются условия идеального контакта

$$u_\rho^I \Big|_{\rho=R_A} = u_\rho^M \Big|_{\rho=R_A}, \quad \sigma_{\rho\rho}^I \Big|_{\rho=R_A} = \sigma_{\rho\rho}^M \Big|_{\rho=R_A}, \quad (3.20)$$

а внутренняя поверхность полых сферических включений свободна от напряжений

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=R_0} = 0. \quad (3.21)$$

Тогда из решения системы линейных алгебраических уравнений, которая получается при подстановке (3.18) и (3.19) в равенства (3.15) и условия (3.20) могут быть однозначно вычислены константы интегрирования:

$$C_I = 2H_C(4G_M + 3K_M)R_A^{3/2-k}, \quad A_M = H_C(H_1 + 8G_M),$$

$$B_M = -(H_1 - 6K_M)H_C R_A^3, \quad H_C = p \left[ 4G_M(H_1 - 6K_M)c^3 + 3K_M(H_1 + 8G_M) \right]^{-1},$$

если композит армирован сплошными сферическими включениями. В случае, когда включения являются полыми, подстановка (3.17) и (3.18) в выражения (3.15) и условия (3.20) и (3.21) позволяет записать систему алгебраических уравнений и решить ее относительно неизвестных постоянных интегрирования:

$$A_I = 2H_2 H_I (4G_M + 3K_M) R_A^{3/2-k}, \quad B_I = 2H_1 H_I (4G_M + 3K_M) h^{2k} R_A^{3/2+k},$$

$$A_M = H_I (4H_3 G_M - H_1 H_2 H_5), \quad B_M = H_I (H_1 H_2 H_5 + 3H_3 K_M) R_A^3,$$

$$H_3 = 2(H_1 h^{2k} + H_2), \quad H_I = p \left[ H_7 - A_{11}^2 H_4 H_5 (4k^2 - 1) - H_8 \right]^{-1},$$

$$H_4 = 4c^3 G_M + 3K_M, \quad H_5 = h^{2k} - 1, \quad H_6 = c^3 - 1,$$

$$H_7 = 16A_{12} H_5 (A_{12} H_4 - 6G_M K_M H_6),$$

$$H_8 = 8A_{11} \left\{ A_{12} H_4 H_5 + 3H_6 K_M G_M \left[ 2k(h^{2k} + 1) - H_5 \right] \right\}.$$

Если предположить, что армирующие элементы однородно распределены внутри композита, то рассматриваемая среда квазиоднородна и сферически трансверсально-изотропна. Поставим в соответствие составным частицам, находящимся в условиях однородного гидростатического растяжения, эквивалентные включения, упругие модули которых являются эффективными деформационными характеристиками композита. Из равенства радиальных перемещений на внешних границах эквивалентных однородных включений

$$u_\rho \Big|_{\rho=R_B} = \frac{pR_B}{3K_{\theta\phi}^*},$$

и составных частиц

$$u_\rho^M \Big|_{\rho=R_B} = A_M R_B + \frac{B_M}{R_B^2}$$

могут быть найдены оценки сверху аналогов эффективного модуля объемного сжатия для сферически трансверсально-изотропного дисперсно-упрочненного материала со сплошными

$$K_{\theta\phi}^* = \frac{4G_M c^3 (H_1 - 6K_M) + 3K_M (H_1 + 8G_M)}{3[H_1 + 8G_M - c^3 (H_1 - 6K_M)]}, \quad (3.22)$$

и полыми

$$K_{\theta\phi}^* = \frac{2H_3 (A_{12}H_4 - 6H_6K_MG_M) - A_{11}H_4H_9}{3H_1H_2H_6H_5 + 3H_3H_{10}}, \quad (3.23)$$

$$H_9 = H_2(1 - 2k) + h^{2k}H_1(1 + 2k), \quad H_{10} = 4G_M + 3c^3K_M$$

включениями. Обратим внимание на то, что замена условий (3.15) на кинематические (3.16), обеспечивающие однородное перемещение внешней поверхности составной сферы, позволяет определить константы интегрирования для сплошных

$$C_I = 2\xi(4G_M + 3K_M)H_C R_A^{3/2-k}, \quad A_M = \xi H_C (H_1 + 8G_M),$$

$$B_M = -\xi(H_1 - 6K_M)H_C R_A^3, \quad H_C = \left\{ R_B [H_1 + 8G_M - (H_1 - 6K_M)c^3] \right\}^{-1}$$

и полых

$$A_I = -2\xi H_2 H_I (4G_M + 3K_M) R_A^{3/2-k}, \quad B_I = -2\xi H_1 H_I (4G_M + 3K_M) h^{2k} R_A^{3/2+k},$$

$$A_M = \xi H_I [H_1 H_2 H_5 - 4H_3 G_M],$$

$$B_M = -\xi H_I [H_1 H_2 H_5 + 3H_3 K_M] R_A^3, \quad H_{11} = A_{11} - 4A_{12},$$

$$H_I = \left\{ R_B \left[ H_5 H_{11} (2H_8 + H_6 H_{11}) - 4A_{11} k (H_{10} + H_{10} h^{2k} + A_{11} H_6 H_5 k) \right] \right\}^{-1}$$

включений, а также получить оценки снизу для эффективных модулей  $K_{\theta\varphi}^*$  из равенства радиальных напряжений на внешних границах эквивалентных однородных включений

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=R_B} = 3 \frac{\xi}{R_B} K_{\theta\varphi}^*,$$

и составных частиц

$$\sigma_{\rho\rho}^M \Big|_{\rho=R_B} = 3K_M A_M - 4 \frac{G_M B_M}{R_B^3}.$$

Несложно показать, что эти оценки совпадут с полученными выражениями (3.22) и (3.23). Следовательно, полученные решения являются точными в рамках ограничений, используемых в полидисперсных моделях. Обратим также внимание на то, что при подстановке  $R_0 = 0$  в уравнения (3.23), последние упрощаются и принимают вид (3.22). Однако, обратим внимание на то, что при помощи указанной выше подстановки не могут быть получены выражения для радиальных перемещений и напряжений в однородном сплошном включении с эффективными свойствами. Для записи аналитических выражений будет необходимо исключить слагаемые, приводящие к сингулярности радиальных перемещений и напряжений в центре частицы.

В частном случае  $\tilde{E}_I = E_I = 9G_I K_I / (3K_I + G_I)$  и  $\tilde{\nu}_I = \nu_I = (3K_I - 2G_I) / (6K_I + 2G_I)$  из выражений (3.22) и (3.23) следуют эффективные модули объемного сжатия двухфазных дисперсно-наполненных композитов, изотропная матрица которых содержит однородно распределенные изотропные ( $n = 1,5$ ) сплошные

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{4\nu_I G_M (K_I - K_M) + K_M (3K_I + 4G_M)}{3\nu_I (K_I - K_M) - 3K_I - 4G_M} = \\ &= K_M + (K_I - K_M) \frac{\nu_I (4G_M + 3K_M)}{4G_M + 3K_I + 3\nu_I (K_M - K_I)} \end{aligned} \quad (3.24)$$



и полые

$$K^* = 4 \frac{G_I K_I (1 - \nu_0)(4\nu_I G_M + 3K_M) + G_M K_M (1 - \nu_I)(4G_I + 3\nu_0 K_I)}{3K_I [\nu_0 + 4G_I (1 - \nu_I)(1 - \nu_0)] + 4G_I (4G_M + 3\nu_I K_M)} \quad (3.25)$$

сферические включения. Обратим внимание на то, что в формулах (3.24) и (3.25) проведена замена  $c^3 = \nu_I$  и  $h^3 = \nu_0$  (где  $\nu_I$  — объемное наполнение и  $\nu_0$  — объемная пористость включений), а равенство (3.24) в точности совпадает с выражением, впервые записанном З. Хашином [47].

В качестве примера рассмотрим задачу прогнозирования эффективных модулей объемного сжатия полимербетонов — дисперсно-наполненных композитов на основе полиэфирных смол, армированных диабазовым, мраморным или гранитным щебнем. Матрицы полимербетонов сами являются композитами, наполненными до концентрации  $\nu_{AG} \leq 0,28$  молотым известняком, кварцевым песком мраморной, диабазовой мукой или цементом. Отличительная особенность полимербетонов высокая (достигающая 0,9) степень наполнения этих материалов минеральными частицами, размер, форма и взаимное расположение которых случайны [119]. Содержание наполнителя в пластмассах изменяется в зависимости от функционального назначения в пределах от 0,1 до 0,4, а объемная доля включений в сферопластиках конструкционного назначения, как правило, не превышает 0,6–0,7.

Большинство исследователей, изучающих полимербетоны, занимаются экспериментальным и теоретическим определением кратковременной и длительной ползучести и долговечности полиэфирных связующих, наполненных минеральной мукой, и материалов на их основе [119–121], а также сорбционных свойств композита [122, 123]. Ограниченное число работ посвящено экспериментальному определению модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и модулей объемного сжатия (или их аналогов при неупругом деформировании) в опытах на сжатие и изгиб [119, 122] сухих и влажных (после двухлетней выдержки в воде) образцов. Авторы [120, 121, 124, 125] отмечают, что сравнение спрогнозированных эффективных упругих модулей полимербетонов с использованием аналитических решений, полученных в рамках полидисперсных

моделей для композитов с изотропными жесткими сферическими включениями ( $K_M/K_I \ll 1$  и  $G_M/G_I \ll 1$ ) при наличии переходного слоя и без него с данными экспериментов показывает отсутствие удовлетворительного согласования результатов. Минеральные наполнители имеют ярко выраженную анизотропию свойств, что предопределяет необходимость проверки полученных выражений для эффективных модулей объемного сжатия на их соответствие данным экспериментов.

На основе полученных аналитических выражений (3.23) для модуля  $K_{\theta\phi}^*$  могут быть определены расчетные зависимости этих характеристик для связующих от концентрации частиц минерального наполнителя  $v_{AG}$ . Для этого в формуле (3.23) необходимо выполнить подстановку  $c^3 = v_{AG}$ .

На рисунке 3.4 показано изменение эффективного объемного модуля  $K_{\theta\phi}^M$  изотропной эпоксидной смолы Диэпокс 450 ( $E_M = 4,8$  ГПа,  $\nu_M = 0,40$ ) при увеличении объемного наполнения мраморной мукой ( $E_I = 55,0$  ГПа,  $\nu_I = 0,29$ ,  $\tilde{E}_I = 23,0$  ГПа и  $\tilde{\nu}_I = 0,32$ ). Сравнение спрогнозированных с использованием выражения (3.22) модулей объемного сжатия с результатами эксперимента [121] (точки на рисунке 3.4) и определенными значениями этих эффективных характеристик  $K_{\theta\phi}^M(1 - \nu_I) = K_M \{1 + \nu_I [4G_M / (3K_M)]\}$  для случая, когда материал содержал изотропные жесткие включения (пунктирная линия на рисунке 3.4), показало, что при  $v_{AG} \leq 0,3$  максимальное отличие значений  $K_{\theta\phi}^M$  не превышает 3–5 %. Существенное несовпадение значений при  $v_{AG} > 0,3$  связано с тем, что, как показали исследования микроструктуры, проведенные авторами [121], при увеличении  $v_{AG}$  вокруг частиц наполнителя толщина слоя матрицы уменьшается и становится практически нулевой при  $v_{AG} = 0,45$ . Это приводит к возникновению доменов, образованных агрегацией частиц мрамора.

Обратим внимание на то, что учет анизотропии деформационных свойств материала наполнителя при  $v_{AG} > 0,3$  (важный для практического применения полимербетонов диапазон изменения объемного наполнения) позволил описать

экспериментальные данные [121] лучше, чем зависимость, полученная для приближения «жестких включений». Так, например, при  $\nu_{AG} = 0,45$  спрогнозированный  $K_{\theta\phi}^M$  для материала с изотропными жесткими включениями на 10 % превышает значение, полученное по формуле (3.22). Вместе с тем, различие на 7 % от экспериментальных данных результатов прогнозирования  $K_{\theta\phi}^M$  с использованием (3.22) может быть объяснено тем, что при высоких объемных наполнениях уменьшаются минимальные расстояния между включениями, возрастает степень взаимодействия в ансамбле включений (не учитывается в рамках полидисперсной модели), начинает оказывать существенное влияние на эффективные модули пористость вблизи границ раздела фаз, неизбежно возникающая при полимеризации эпоксидной смолы.

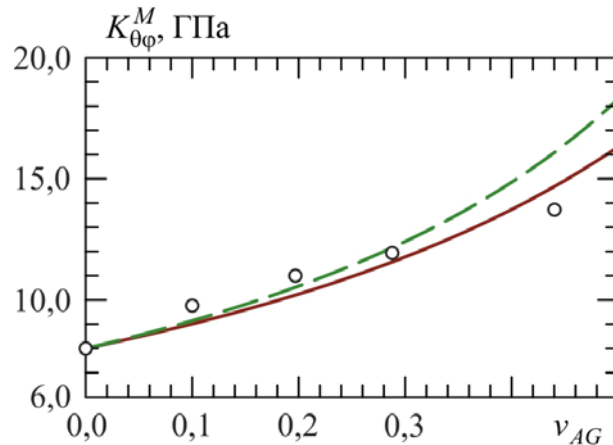


Рисунок 3.4 – Зависимость модуля объемного сжатия эпоксидной смолы Диэпокс 450 от объемного наполнения мраморной мукой (точки – экспериментальные данные [121], пунктирная линия – приближение для изотропных жестких включений)

Полученное соответствие результатов прогнозирования модулей объемного сжатия полиэфирной смолы Диэпокс 450 экспериментальным данным позволяет сделать предположение о возможности использования полидисперсной модели для описания и оценки влияния типа связующего с минеральным наполнителем и сферических армирующих частиц на эффективные деформационные характеристики полимербетонов.

На рисунке 3.5, а представлен образец полимербетона на основе полиэфирной смолы Диэпокс 450 с базальтовой мукой и гранитными

включениями, а на рисунке 3.5, б — спрогнозированные с использованием формулы (3.22) эффективные объемные модули  $K_{\theta\phi}^*$  композитов на основе различных связующих: С (смола Виналкид 550 без наполнителя), С+ДМ (смола Виналкид 550 с диабазовой мукой,  $\nu_{AG}=0,28$ ) и С+ММ (смола Виналкид 550 с мраморной мукой,  $\nu_{AG}=0,28$ ), соответствующие следующим упругим постоянным материалов фаз:  $E=5,7$  ГПа и  $\nu=0,32$  (смола С);  $E=9,7$  ГПа и  $\nu=0,30$  (смола С+ММ);  $E=11,0$  ГПа и  $\nu=0,31$  (смола С+ДМ) соответствуют данным [124];  $E=88,0$  ГПа,  $\nu=0,26$ ,  $\tilde{E}=65,0$  ГПа и  $\tilde{\nu}=0,23$  (диабаз);  $E=60,0$  ГПа,  $\nu=0,28$ ,  $\tilde{E}=40,0$  ГПа и  $\tilde{\nu}=0,18$  (гранит).

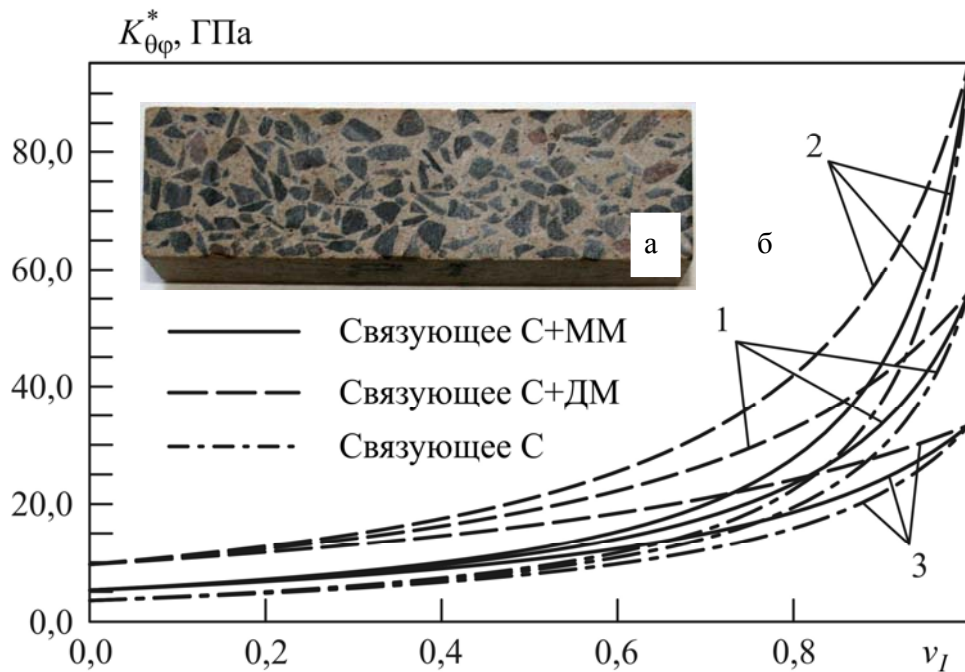


Рисунок 3.5 – Случайная структура полимербетона на основе полиэфирной смолы Диепокс 450 с базальтовой мукой и гранитными включениями (а), эффективные модули объемного сжатия полимербетонов, армированных диабазом (кривые 1), мраморными (кривые 2) и гранитными (кривые 3) сферами (б)

Как видим, до объемной доли включений  $\nu_I=0,73$  (реализуемый на практике диапазон) наиболее высокие значения эффективных модулей  $K_{\theta\phi}^*$  имеют материалы на основе связующего С+ДМ (рисунок 3.5). Полученные зависимости позволяют сделать еще один вывод: для повышения модуля объемного сжатия

необходимо использовать связующие с минеральным наполнителем. Композиты с ненаполненной матрицей имеют более низкие эффективные характеристики.

### **3.4. Основные результаты и выводы главы**

- Получено новое аналитическое решение задачи Ламе для составных толстостенных трансверсально-изотропных сферических тел;
- Показано влияние параметров анизотропии материалов внутренней и внешней части составного трансверсально-изотропного сферического сосуда давления и величины технологического давления натяга, на распределение независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях, позволяющее «управлять» напряженным состоянием составных сферических конструкций при проектировании с целью увеличения их эффективности;
- Проведена оценка прочности по совокупности критериев, учитывающих различные механизмы исчерпания несущей способности, характерные для анизотропных материалов;
- В рамках гипотез полидисперсных моделей механики получены аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов, изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения. Проанализировано влияние состава полимерной матрицы и минерального наполнителя на эффективные модули полимербетонов. Даны рекомендации позволяющие повысить эффективные модули объемного сжатия.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Итоги выполненных исследований и рекомендации

Основные результаты, полученные в работе, состоят в следующем:

✓ Получены новые аналитические решения задач о равновесии полых и составных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной внешней или внутренней поверхностью соответственно, а также при условии не полного (только радиальном направлении) закрепления;

✓ Проанализирован вклад массовых сил в распределение независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях тяжелых трансверсально-изотропных сфер;

✓ Определены закономерности совместного деформирования крепи и окружающего массива осадочных пород, проведена оценка прочности монолитной железобетонной крепи сферической подземной выработки, используемой для длительного хранения высокоагрессивных и реакционно-способных веществ, по совокупности критериев, получены результаты, иллюстрирующие возможную реализацию механизмов исчерпания несущей способности крепи и окружающего породного массива от растяжения или сжатия в меридиональном или радиальном направлении, либо разрушения по механизму межслойного сдвига.

Последнее позволяет **рекомендовать** при проектировании систем мониторинга геологических сооружений и тяжелых сферических конструкций ответственного назначения размещать измерительные датчики в точках вертикальной диаметральной оси и горизонтальной диаметральной плоскости.

✓ Получено новое аналитическое решение задачи о равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сферических тел, находящихся под действием внешнего и внутреннего равномерных давлений;

✓ Определены закономерности взаимодействия внутренней и внешней частей составной сферы, показано влияние соотношения показателей анизотропии и величины технологического давления на характер распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях, позволяющие использовать решения не только для определения полей перемещений, деформаций и напряжений в сферических резервуарах (газгольдеры или шаровые хранилища, находящиеся под избыточным давлением сжиженных газов, высокоагрессивных сред и легковоспламеняющихся жидкостей), но и для «управления» напряженным состоянием при проектировании составных сферических сосудов давления, увеличивая их эффективность;

✓ В рамках полидисперсных моделей механики получены аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-наполненных композитов изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения. Проанализировано влияние фазового состава полимерной матрицы и минерального наполнителя на эффективные деформационные свойства полимербетонов.

#### **Перспективы дальнейшей разработки темы диссертации:**

Дальнейшее развитие темы диссертации может быть связано с получением решений задач для анизотропных сферических тел, находящихся под действием неравномерных осесимметричных статических и/или динамических нагрузок (например, учет реакции основания). Использованный в работе метод получения аналитических решений может быть также применен для решения задач о равновесии осесимметричным анизотропным тяжелым цилиндрическим телам.

Полученные аналитические решения могут быть использованы как основа для получения новых аналитических решений задач, описывающих процессы деформирования элементов конструкций и растущих тел, которые создаются методами аддитивной непрерывной послойной намотки предварительно пропитанными волокнами или лентами ткани, послойной выкладки, послойного

наплавления, осаждения из газовой или жидкой фазы из упругих и неупругих трансверсально-изотропных материалов.

Полученные аналитические решения могут рассматриваться в качестве эталонов для тестирования алгоритмов решения краевых задач численными методами, а также могут быть полезны исследователям при отработке методик натуральных экспериментов со сферическими телами, в том числе для идентификации материальных констант и функций анизотропных сред, создающихся совместно с конструкциями, в которых они используются.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильдеман, В.Э. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / В.Э. Вильдеман, Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов – М.: Наука, 1997. – 288 с.
2. Вильдеман, В.Э. Моделирование процессов деформирования и разрушения композитов. Ч. 1: Модели накопления повреждений / В.Э. Вильдеман – Пермь: Изд-во ПГТУ, 2000. – 76 с.
3. Победря, Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
4. Lamé, G. Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications / G. Lamé – Paris: Mallet-Bachelier Publ., 1859. – 368 p.
5. Lamé, G. Memoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques / G. Lamé // Journal de mathématiques Pures et Appliquées. – 1854. – Vol. 19. – P. 51–87.
6. Thomson, W. Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid / W. Thomson // Mathematical and Phys. Papers. – 1892. – Vol. 3. – P. 351–394. (впервые опубликовано в Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1863. – Vol. 153. – P. 583 – 616.)
7. Ляв, А. Математическая теория упругости / А. Ляв; Пер. с англ. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
8. Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье – М.: ГИТТЛ, 1955. – 492 с.
9. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье – М.: Наука, 1970. – 940 с.
10. Папкович, П.Ф. Теория упругости / П.Ф. Папкович – М.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
11. Лурье, А.И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки / А.И. Лурье // ПММ. – 1943. – Т. 7, Вып. 6. – С. 393–404.
12. Галеркин, Б.Г. Равновесие упругой сферической оболочки / Б.Г. Галеркин // ПММ. 1942. – Т. 6, Вып. 6. – С. 487–496.
13. Лурье, А.И. Равновесие упругой полой сферы / А.И. Лурье // ПММ. – 1953. – Т.17, Вып. 3. – С. 311–332.

14. Ломонос, Л.Н. Смешанная осесимметричная задача для упругой поллой сферы / Л.Н. Ломонос // Математическая физика: Респ. межвед. сб. – 1977. – Вып. 21. – С. 92–97.
15. Соляник-Красса, К.В. Осесимметричная задача теории упругости / К.В. Соляник-Красса – М.: Стройиздат, 1987. – 337 с.
16. Larmour, J. The influence of flows and air-cavities on the strength of materials / J. Larmour // Phil. Mag., Ser. 5. – 1892. – Vol. 33. – P. 70–78.
17. Southwell, R.V. On the concentration of stress in the neighborhood of a small spherical flow / R.V. Southwell // Phil. Mag., Ser. 7. – 1926. - Vol. 1. – P. 71–97.
18. Sternberg, E. On the axisymmetric problem of elasticity theory for a region bounded by two concentric spheres / E. Sternberg, R.A. Eubanks and M.A. Sadowsky // Appl. Mech.: Proc. First U.S. Nat. Congress. – New York: A.S.M.E. Publ., 1952. – P. 209–215.
19. Sadowsky, M.A. Stress concentration around a traxil ellipsoidal cavity / M.A. Sadowsky, E. Sternberg // Journal of applied Mechanic – 1949. – Vol. 16. – P. 149–157.
20. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин – Киев: Наукова думка, 1968. – 887 с.
21. Метод фотоупругости. Т. 1.: Решение задач статики сооружений. Метод оптически чувствительных покрытий. Оптически чувствительные материалы / Н.А. Стрельчук, Г.Л. Хесин, Ф.Ф. Губин и др. – М.: Стройиздат, 1975. – 400 с.
22. Спорыхин, А.Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / Спорыхин А.Н., Шашкин А.И. – М.: Наука, 2004. – 234 с.
23. Кривоченко, А.В. Динамическое расширение сферической полости в сжимаемом упруго-вязко-пластическом пространстве / А.В. Кривоченко, А.Н. Спорыхин, А.С. Чеботарёв // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2005. – № 1. – С. 183-188.
24. Алимжанов, М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород / М.Т. Алимжанов – Алма-Ата.: Наука, 1982. – 272 с.

25. Махоркин, И.Н. Термоупругость кусочно-однородных сферических тел / И.Н. Махоркин // Математические методы в термомеханике. – Киев: Наукова думка, 1978. – С. 163–172.
26. Подильчук, Ю.Н. О тепловых напряжениях в полой сфере / Ю.Н. Подильчук // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 8–17.
27. Кузнецов, С.И. Задача теплопроводности для растущего шара / С.И. Кузнецов, А.В. Манжиров, И. Федотов // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 6. – С. 139–148.
28. Бровман, М.Я. Деформирование шара с электрическим зарядом / М.Я. Бровман // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 3. – С. 74–77.
29. Маматкулов, А. Толстостенная сфера под действием внутреннего давления / А. Маматкулов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 1988. – № 21. – С. 77-81.
30. Бровман, М.Я. Упругопластическая деформация шара при симметричном нагружении / М.Я. Бровман // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 3. – С. 117–125.
31. Ефремов, В.Г. Идеально-пластическое напряженное состояние тел вблизи сферической полости / В.Г. Ефремов // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 3. – С. 70 – 75.
32. Кожевникова, Л.Л. Аналитическое исследование упругого равновесия полой сферы, жестко закрепленной по внешнему контуру / Л.Л. Кожевникова, Г.Б. Кузнецов, В.П. Матвеевко, И.Н. Шардаков // Пробл. прочности. – 1974. – № 9. С. 20–23.
33. Кожевникова, Л.Л. Равновесие тел вращения под действием массовых сил / Л.Л. Кожевникова, Г.Б. Кузнецов, А.А. Роговой – М.: Наука, 1983. – 102 с.
34. Кузнецов, Г.Б. Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел / Г.Б. Кузнецов – М.: Наука, 1979. – 112 с.
35. Арутюнян, Н.Х., Механика растущих вязкоупругопластических тел / Н.Х. Арутюнян, А.Д. Дроздов, В.Э. Наумов – М.: Наука, 1987. – 471 с.
36. Арутюнян, Н.Х. Контактные задачи механики растущих тел / Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров, В.Э. Наумов – М.: Наука, 1991. – 176 с.
37. Лычев, С.А. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации / С.А. Лычев, А.В. Манжиров // ПММ. – 2013. – Т. 77. – С. 585–604.

38. Манжиров, А.В. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле / А.В. Манжиров, Д.А. Паршин // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – №1. – С. 66 – 83.
39. Паршин, Д.А. Аналитические решения задачи об аддитивном формировании неоднородного упругого шарового тела в произвольном нестационарном центральном поле сил / Д.А. Паршин // Изв. РАН. МТТ. – 2017. – № 5. – С. 70 – 82.
40. Тимошенко, С.П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений / С.П. Тимошенко – М.: ГИТТЛ, 1957. – 536 с.
41. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий – М.: Наука, 1977. – 416 с.
42. Saint-Venant, B. Memoire sur les divers genres d'homogeneite semi-polaire ou cylindrique et sur les homogeneites polaires ou spheri-coniques et spheriques / B. Saint-Venant // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. – 1865. – Vol. 10. – P. 297 – 349.
43. Шармазанашвили, А.Х. Расчет анизотропных толстостенных сферических оболочек / А.Х. Шармазанашвили // Вестник инж. и техников. – 1938. – № 7. – С. 35–37.
44. Колчин, Г.Б. Центральное-симметричная деформация упругого радиально-неоднородного трансверсально-изотропного полого шара / Г.Б. Колчин, Е.К. Ковалов // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – №6. – С. 42 – 47.
45. Dai, H.L. Exact Electromagnetothermoelastic Solution for a Transversely Isotropic Piezoelectric Hollow Sphere Subjected to Arbitrary Thermal Shock / Dai Hong-Liang, Zheng Hong-Yan, Yang Lei // Journal of Elasticity. – 2011 – Vol. 102, № 1. – P. 79–97.
46. Eshelby, J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems / J.D. Eshelby // Proc. R. Soc. London. – 1957. – A241. – P. 376–396.
47. Хашин, З. Упругие модули неоднородных материалов / З. Хашин // Прикл. механика: Тр. Амер. о-ва инж.-мех. – 1962. – Т. 29, № 1. – С. 159–167.

48. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен – М.: Мир, 1982. – 328 с.
49. Mura, T. Micromechanics of Defects in Solids / T. Mura – Martinus Nijhoff Publishers, 1987. – 588 p.
50. Withers, P.J. The Deformation of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion in Transversely Isotropic Medium, and Its Relevance to Composite Materials / P.J. Withers // *Philosophical Magazine*. – 1989. – A59. – P. 759–781.
51. Ustinov, K.B. On application of classical Eshelby approach to calculating effective elastic moduli of dispersed composites / K.B. Ustinov, R.V. Goldstein // *International Journal of Fracture*. – 2007. – Т. 147, № 1- 4. – С. 55–66.
52. Семенова, Д.В. Некоторые асимптотические разложения компонент тензора Эшелби в случае кубической и гексагональной анизотропии / Д.В. Семенова, К.Б. Устинов // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2010. – № 4. – С. 80–100.
53. Лурье, С.А. Решение задачи Эшелби в градиентной теории упругости для многослойных сферических включений / С.А. Лурье, Д.Б. Волков-Богородский // *Изв. РАН. МТТ*. – 2016. – № 2. – С. 32–50.
54. Lurie, S. Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions / S. Lurie, D. Volkov-Bogorodskii, N. Tuchkova // *Acta Mechanica*. – 2016. – Vol. 227, № 1. – P. 127–138.
55. Березовский, В.В. Исследование механических свойств металлического композиционного материала на основе алюминиевого сплава, армированного дисперсными частицами карбида кремния / В.В. Березовский, Ю.О. Соляев, С.А. Лурье, А.В. Бабайцев, А.А. Шавнев, Ю.А. Курганова // *Деформация и разрушение материалов*. – 2014. – № 12. – С. 12–16.
56. Lurie, S. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity: applications to composite materials / S. Lurie, D. Volkov-Bogorodsky, A. Leontiev, E. Aifantis // *International Journal of Engineering Science*. – 2011. – Vol. 49, № 12. – P. 1517–1525.
57. Волков-Богородский, Д.Б. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости / Д.Б. Волков-Богородский, С.А. Лурье // *Изв. РАН. МТТ*. – 2010. – № 4. – С. 182–192.

58. Лурье, С.А. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями / С.А. Лурье, Ю.О. Соляев // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2010. – № 1. – С. 80–90.
59. Канаун, С.К. Метод эффективного поля в механике композитных материалов / С.К. Канаун, В.М. Левин — Петрозаводск: Изд. Петрозаводского гос. ун-та, 1993. – 600 с.
60. Зарубин, В.С. Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2013. – №9. – С. 435 – 444.
61. Зарубин, В.С. Оценка температурного коэффициента линейного расширения композита с дисперсными анизотропными включениями методом самосогласования / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52. № 2. – С. 209 – 224.
62. Зарубин, В.С. Оценки упругих свойств композита с анизотропными шаровыми включениями / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2014. – №8. – С. 237–255.
63. Паньков, А.А. Сингулярное приближение метода периодических составляющих статистической механики композитов / А.А. Паньков, Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов // Механика композитных материалов. – 1997. – №4. – С. 460–473.
64. Shen, Z. Predicting effective thermal and elastic properties of cementitious composites containing polydispersed hollow and core-shell micro-particles [Electronic resource] / Zhenglai Shen, Hongyu Zhou // Cement and Concrete Composites. – 2020. – Vol. 105. – Art. 103439. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2019.103439>
65. Kachanov, M., Sevostianov I., Effective properties of heterogeneous materials. In: Micromechanics of Materials, with Applications. Solid Mechanics and its Applications / Mark Kachanov, Igor Sevostianov // Springer, Cham – 2018. – Vol. 249. – pp. 315–467. – URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-76204-3\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-76204-3_5)

66. Вильчевская, Е.Н. Кинетика фронта химической реакции в центрально-симметричных задачах механохимии / Е.Н. Вильчевская, А.Б. Фрейдin, Н.Ф. Морозов // ДАН. – 2015. – Т. 461. – № 5. – С. 525–529. – DOI 10.7868/S0869565215110109.
67. Freidin, A. Chemical reactions in spherically symmetric problems of mechanochemistry / A. Freidin, N. Morozov, S. Petrenko, E. Vilchevskaya // Acta Mechanica. – 2016, – Vol. 227, № 1. – P. 43–56.
68. Зайцев, А.В. Упругое равновесие тяжелой трансверсально-изотропной толстостенной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №5(21). – С. 85–95.
69. Фукалов, А.А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения / А.А. Фукалов, А.В. Кутергин // Вестник Нижегородского университета имени Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4, ч. 4. – С. 1831–1833.
70. Zaitsev, A.V. Initial strength analysis of reinforced concrete monolithic supports for spherical and cylindrical mine workings / A.V. Zaitsev, A.V. Kutergin, A.A. Fukalov, A.S. Votinov, I.Yu. Kolytchev // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Sci. – 2022. – Vol. 1021. Art. 012060 doi:10.1088/1755-1315/1021/1/012060
71. Зайцев, А.В. Механизмы начального разрушения железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013. – № 4. – С. 59–74.
72. Зайцев, А.В. Равновесие жестко закрепленных по внешней поверхности тяжелых упругих анизотропных тел с центральной симметрией в поле гравитационных сил / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – 2017. – Т 17, № 8. – С. 13–17.
73. Zaitsev, A.V. Initial strength analysis of anisotropic concrete supports for spherical mine workings in a sedimentary rock mass / A.V. Zaitsev, Yu.V. Sokolkin,

- A.A. Fukalov // Physical and mathematical modeling of Earth and environment processes (2018): 4th Int. Sci. School for Young Scientists, Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS / Eds. V.I. Karev, D. Klimov, K. Pokazeev. Cham: Springer Nature Switzerland AG/Springer, – 2019. – P. 463–471.
74. Зайцев, А.В. Решение задачи Ламе для составных трансверсально-изотропных сфер с общим центром / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Физико-математические науки. – 2021. – Т. 25, № 1. – С. 83–96.
75. Фукалов, А.А. Равновесие жесткозакрепленной на внешней поверхности полой трансверсально-изотропной толстостенной сферы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил / А.А. Фукалов, А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, Ю.В. Баяндин // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Физико-математические науки. – 2021. – Т. 25, № 2. – С. 303–319.
76. Зайцев, А.В. Эффективные модули объемного сжатия дисперсно-упрочненных композитов со сплошными и полыми анизотропными сферическими включениями / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2010. – № 4. – С. 46–54.
77. Зайцев, А.В. Равновесие анизотропных полых сферических и цилиндрических тел под действием массовых сил / А.В. Зайцев, А.В. Кутергин, А.А. Фукалов – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2015. – 139 с.
78. Зайцев, А.В. Уточненный прочностной анализ контейнеров для длительного хранения и транспортировки высоко-агрессивных и реакционно-способных сред / А.В. Зайцев, А.В. Кислицин, А.В. Кутергин, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред: Тез. докл. Всероссийск. конф., посвященная 90-летию со дня рождения академика И. Ф. Образцова – Москва: Изд-во ИПМ РАН, – 2010. – С. 211.
79. Зайцев, А.В. Эффективные модули объемного сжатия однонаправленно армированных и дисперсно-упрочненных композитов со сплошными анизотропными элементами структуры / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Механика композиционных материалов и конструкций,



- сложных и гетерогенных сред: Сб. мат. Всероссийск. научн. конф. с межд. участием, посвященной 95-летию со дня рождения акад. И.Ф. Образцова - М.: Изд-во ИПРИМ РАН, – 2015. - С. 140–142.
80. Зайцев, А.В. Упругое равновесие жестко закрепленных по внешней поверхности тяжелых анизотропных тел с центральной и осевой симметрией / А.В. Зайцев, А.В. Кутергин, А.А. Фукалов // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Тр. II междунар. конф. Т. 1. – Ереван: ЕГУАС, – 2010. – С. 249–253.
81. Зайцев, А.В. Уточненный прочностной анализ монолитной крепи сферической горной выработки / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // Молодежная наука Прикамья. – 2010. – Вып. 11. – С. 365–370.
82. Зайцев, А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с осевой и центральной симметрией и их приложения / А.В. Зайцев, А.В. Кутергин, А.А. Фукалов // Механика микронеоднородных материалов и разрушение: Тез. докл. VI Рос. науч.-техн. конф. Екатеринбург: Изд-во ИМаш УрО РАН, – 2010. – С. 152.
83. Зайцев, А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с центральной симметрией, находящихся в поле гравитационных сил, и их приложения к задачам геомеханики / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. Междунар. науч. конференция-школа молодых ученых (23–25 октября 2019 г., Москва). – М.: Принт Про, – 2019. – С. 60–62.
84. Зайцев, А.В. Уточненный прочностной анализ сферической горной выработки, подкрепленной анизотропной крепью / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // Математ. моделирование в естественных науках: Тез. докл. 19-й Всероссийск. школы-конф. молодых ученых и студентов. – Пермь, 2010. С. 52–53.
85. Зайцев, А.В. Начальная прочность железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных и сыпучих пород / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред: Сб. тр. 10-й Всероссийск. научн. конф. с межд. участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной

- 100-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова - М.: ООО «Сам Полиграфист», – 2020. - С. 457–460.
86. Зайцев, А.В. Совместное деформирование и оценка начальной прочности монолитной анизотропной крепи сферической горной выработки и окружающего массива осадочных пород / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // Тез. докл. XVII Зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь: УрО РАН, – 2011. – С. 124.
87. Фукалов, А.А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих тяжелых трансверсально-изотропных сфер и их приложения / А.А. Фукалов, А.В. Зайцев // Математ. моделирование в естественных науках: Тез. докл. 18-й Всероссийск. школы-конф. молодых ученых и студентов. – Пермь, – 2009. – С. 103–104.
88. Фукалов, А.А. Уточненный прочностной анализ анизотропной монолитной крепи сферической горной выработки / А.А. Фукалов, А.В. Зайцев // XXXVI Гагаринские чтения: Тез. докл. Межд. молодежной науч. конф. – Москва: Изд-во МАТИ им. К.Э. Циолковского, – 2010. – С. 95–97.
89. Фукалов, А.А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с осевой и центральной симметрией и их приложения / А.А. Фукалов, А.В. Зайцев, А.В. Кутергин // Механика деформаций и разрушение материалов: Тез. докл. Рос. школы- конф. молодых ученых. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, – 2010. – С. 57.
90. Fukalov, A.A. Exact analytical solutions to problems on equilibrium state of thick-walled heavy anisotropic axial- and central-symmetric bodies and their applications / A.A. Fukalov, A.V. Kutergin, A.V. Zaitsev // Advanced Problems in Mechanics: XXXVIII Int. Summer School. Book of Abstracts. – St. Petersburg: IPMechEngin RAS, – 2010. – P. 38.
91. Фукалов, А.А. Уточненный прочностной анализ анизотропной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород / А.А. Фукалов, А.В. Зайцев // XXXVII Гагаринские чтения. Научные труды Межд. Молодежной науч. конф. в 8 томах – Москва: Изд-во МАТИ, – 2011. – Т.1. – С. 244–245.

92. Зайцев, А.В. Об одном точном аналитическом решении задачи Ламе для составной трансверсально-изотропной толстостенной сферы / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // *Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации* – 2009: Материалы XII Всероссийск. науч.-техн. конф. – Пермь: ПГТУ, – 2009. – С. 184–186.
93. Зайцев, А.В. Точное аналитическое решение задачи Ламе для составной трансверсально-изотропной толстостенной сферы / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // *Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии: Тез. докл. VII Всероссийск. конф. молодых ученых* / Под ред. А.А. Маслова. – Новосибирск: Сибирское науч. изд-во, – 2009. – С. 83–85.
94. Зайцев, А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии составных упругих анизотропных тел с Центральной симметрией, находящихся в поле гравитационных сил, и их приложения к задачам геомеханики / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // *Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред: Сб. тез. 9-й Всероссийск. научн. конф. с межд. участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН* - М.: ООО «Сам Полиграфист», – 2019. - С. 172.
95. Fukalov, A.A. Exact analytical solutions to Lamé problems for the thick-walled anisotropic combined extended cylinders and spheres under the action of uniform internal and external lateral pressure / A.A. Fukalov, A.V. Kislitsun, A.V. Zaitsev // *Advanced Problems in Mechanics: XXXVI Int. Summer School. Book of Abstracts.* – St. Petersburg: IPMechEngin RAS, – 2008. – P. 40.
96. Зайцев, А.В. Точные аналитические решения задач Ламе для толстостенных тел с осевой и центральной симметрией и их приложения / А.В. Зайцев, А.В. Кислицын, А.А. Фукалов // *Механика сплошных сред как основа современных технологий: тез. докл. XVI Зимней школы по механике сплошных сред.* – Пермь: УрО РАН, – 2009. – С. 158.
97. Зайцев, А.В. Точные аналитические решения задач Ламе для составных толстостенных анизотропных цилиндрических и сферических тел и их приложения / А.В. Зайцев, А.В. Кислицын, А.А. Фукалов // *Математ. моделирование в естественных науках: Тез. докл. 17-й Всероссийск. школы-конф. молодых ученых и студентов.* – Пермь, – 2008. – С. 40.

98. Zaitsev, A.V. Exact analytical solutions to problems on equilibrium state of thick-walled heavy anisotropic axial- and central-symmetric bodies and their applications to initial strength of concrete monolithic mine working supports / A.V. Zaitsev, A.V. Kutergin, A.A. Fukalov // Advanced Problems in Mechanics: XXXIX Int. Summer School. Book of Abstracts. – St. Petersburg: IPMechEngin RAS, – 2011. – P. 102.
99. Фукалов, А.А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения / А.А. Фукалов, А.В. Кутергин // Современные методы механики: X Всерос. съезд по фундам. проблемам теорет. и прикл. механики: тез. докл. Второй Всерос. шк. мол. ученых-механиков. – Нижний Новгород, – 2011. – С. 189–190.
100. Зайцев, А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии анизотропных линейно упругих тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения / А.В. Зайцев, А.В. Кислицын, А.А. Фукалов // Математ. моделирование в естественных науках: Тез. докл. XX Всероссийск. школы-конф. молодых ученых и студентов. – Пермь, – 2011. – С. 104–105.
101. Зайцев, А.В. Многомасштабная модель полимербетона и ее приложения к задачам уточненного прочностного анализа контейнеров из стеклопластика и полимербетона / А.В. Зайцев, А.В. Кислицын, А.В. Кутергин, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Математ. моделирование в естественных науках: Тез. докл. XXI Всероссийск. школы-конф. молодых ученых и студентов. – Пермь, – 2012. – С. 73–75.
102. Зайцев, А.В. Оптимальное проектирование и уточненный прочностной анализ контейнеров для длительного хранения и транспортировки высокоагрессивных и реакционноспособных сред / А.В. Зайцев, А.В. Кислицын, А.В. Кутергин, А.А. Фукалов // XXXVIII Гагаринские чтения: науч. тр. Межд. молодежной науч. конф. – Москва: Изд-во МАТИ им. К.Э. Циолковского, – 2012. – Т.1. – С. 112–114.
103. Зайцев, А.В. Задачи об упругом равновесии анизотропных составных сферических тел, находящихся под действием массовых сил и их приложения к оценке начальной прочности геологических сооружений / А.В. Зайцев,

- А.А. Фукалов // Тез. докл. XVIII Зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь: УрО РАН, – 2013. – С. 135.
104. Зайцев, А.В. Оценка начальной прочности анизотропной крепи сферической и цилиндрической горизонтальной горной выработки в массиве осадочных пород / А.В. Зайцев, А.В. Кутергин, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Механика наноструктурированных материалов и систем: Тез. докл. Всероссийск. конф. – М.: Изд-во ИПРИМ РАН, – 2011. – С. 35–36.
105. Zaitsev, A.V. Exact analytical solutions to problems on equilibrium state of elastic combined thick-walled heavy anisotropic cylinders and spheres and their applications / A.V. Zaitsev, A.A. Fukalov, A.V. Kutergin // Advanced Problems in Mechanics: XL Int. Summer School. Book of Abstracts. – St. Petersburg: IPMechEngin RAS Publ., – 2012. – P. 95–96.
106. Зайцев, А.В. Оценка начальной прочности железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах: Сб. тез. Междунар. науч. школа молодых ученых – М.: МАКС Пресс, – 2015. – С. 73–76.
107. Зайцев, А.В. Упругое равновесие жестко закрепленных по внешней поверхности тяжелых анизотропных тел с центральной и осевой симметрией / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XVIII Межд. конф. – Т. 1 – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного фед. ун-та. – 2016. – С. 209–213.
108. Фукалов, А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения / А.А. Фукалов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Казань, Изд-во Казан. (Приволж.) федер. ун-та, – 2015. – С. 3951–3953.
109. Зайцев, А.В. Exact analytical solutions to problems on equilibrium state of elastic anisotropic heavy central- and axial-symmetric bodies and their applications to geomechanical problems / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Актуальные проблемы механики сплошной среды: материалы V междунар.

- конф., 02-07 окт. 2017, Цахкадзор, Армения / Нац. акад. наук Армении, Ин-т механики. – Ереван : Тип. центра печати и инф. Нац. ун-та архитектуры и стр-ва Армении, – 2017. – С. 239–240
110. Зайцев, А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с центральной и осевой симметрией, находящихся в поле гравитационных сил, и их приложения к задачам геомеханики / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // Математическое моделирование в естественных науках: материалы Всерос. шк.-конф. молодых ученых и студентов, г. Пермь, 2015 г. / Перм. нац. исслед. политехн. ун-т [и др.]. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, – 2015. – С. 141–144.
111. Зайцев, А.В. Оценка начальной прочности монолитных крепей горизонтальной цилиндрической и сферической горных выработок в массиве осадочных пород / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // Математическое моделирование в естественных науках: материалы Всерос. шк.-конф. молодых ученых и студентов, г. Пермь, 2016 г. / Перм. нац. исслед. политехн. ун-т [и др.]. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, – 2016. – Т. 1. – С. 586–589.
112. Зайцев, А.В. Эффективные модули объемного сжатия композитов, армированных сплошными и полыми анизотропными волокнами или сферическими включениями / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Математическое моделирование в естественных науках: материалы Всерос. шк.-конф. молодых ученых и студентов, г. Пермь, 2015 г. / Перм. нац. исслед. политехн. ун-т [и др.]. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, – 2015. – С. 145–148.
113. Зайцев, А.В. Прогнозирование эффективных модулей объемного сжатия двухфазных композитов со сплошными и полыми анизотропными волокнами и сферическими включениями / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Математическое моделирование в естественных науках: материалы Всерос. шк.-конф. молодых ученых и студентов, г. Пермь, 2016 г. / Перм. нац. исслед. политехн. ун-т [и др.]. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, – 2016. – Т. 1. – С. 589–592.
114. Зайцев, А.В. Упругое равновесие жестко закрепленных по внешней поверхности тяжелых анизотропных тел с центральной и осевой симметрией / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Современные проблемы механики сплошной среды труды XVIII Международной конференции: в 2

- томах. Ответственный редактор А.О. Ватульян, редакторы: А.В. Наседкин, А.В. Попов. – 2016. – С. 209–213.
115. Зайцев, А.В. Аналитические решения задач о равновесии анизотропных тел с центральной симметрией, находящихся под действием массовых сил и их приложения / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // XX Зимняя школа по механике сплошных сред: тезисы докладов, Пермь, 13-16 февр. 2017 г. – С. 130.
116. Зайцев, А.В. Эффективные модули объемного сжатия двухфазных композитов со сплошными или полыми трансверсально-изотропными волокнами и сферическими включениями / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: (18-22 сент. 2017 г., Самара, Россия) / Самар. гос. техн. ун-т [и др.]. – Самара: СамГТУ, – 2017. – Т. 2. – С. 212–214.
117. Морс, Ф.М. Методы теоретической физики / Ф.М. Морс, Г. Фешбах – Т. 1. – М.: ИЛ, 1958. – 931 с.
118. Mityushov, E.A. Effective elastic properties of textured cubic polycrystals / E.A. Mityushov, S.A. Berestova and N.Yu. Odintsova // Textures and Microstructures. – 2002. – Vol. 35(2). – P. 99–111.
119. Максимов, Р.Д. Механические свойства полиэфирного полимербетона / Р.Д. Максимов, Л.А. Иргенс, Ю.О. Янсонс, Э.З. Плуме // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, № 2. – С. 147–162.
120. Христова, Ю. Прогнозирование ползучести полимербетона / Ю. Христова, К. Анискевич // Механика композит. материалов. – 1995. – Т. 31, № 3. – С. 305–309.
121. Христова, Ю. Прогнозирование ползучести отвержденной эпоксидной смолы, наполненной мраморной мукой / Ю. Христова, К. Анискевич // Механика композит. материалов. – 1994. – Т. 30, № 5. – С. 590–599.
122. Максимов, Р.Д. Водостойкость полиэфирного полимербетона / Р.Д. Максимов, Л.А. Иргенс, Э.З. Плуме, Ю.О. Янсонс // Механика композит. Материалов. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 147–164.

123. Анискевич, К. Сорбционные характеристики полимербетона при длительной выдержке в воде / К. Анискевич, Ю. Христова, Ю.О. Янсонс // Механика композит. материалов. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 463–476.
124. Анискевич, К. Влияние старения связующего на ползучесть полимербетона / К. Анискевич, Ю. Христова // Механика композит. материалов. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 787–794.
125. Анискевич, К. Влияние концентрации и дисперсности наполнителя на ползучесть полимерного композита / К. Анискевич, Ю. Христова // Механика композит. материалов. – 1995. – Т. 31, № 2. – С. 179–185.