

«ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД УРО РАН» – ФИЛИАЛ  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ  
НАУКИ ПЕРМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА  
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Ошмарин Дмитрий Александрович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ SMART-СИСТЕМ  
С ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ  
И ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

1.1.8 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
академик РАН  
Матвеев Валерий Павлович

Пермь – 2022

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Математическая постановка задачи о колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими элементами .....</b>	<b>28</b>
1.1. Общая постановка задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях .....	28
1.2. Вариационное уравнение для пьезоэлектрического тела .....	29
1.3. Вариационное уравнение для кусочно-однородного вязкоупругого тела .....	38
1.4. Вариационное уравнение для внешней электрической цепи .....	41
1.4.1. Резистивная цепь .....	43
1.4.2. Емкостная цепь .....	44
1.4.3. Индуктивная цепь .....	44
1.5. Вариационное уравнение для задачи о колебаниях кусочно-однородного электровязкоупругого тела с внешними электрическими элементами .....	45
<b>Глава 2. Численная реализация задачи о колебаниях электровязкоупругих тел с элементами электрических цепей .....</b>	<b>47</b>
2.1. Конечно-элементные соотношения для кусочно-однородного электровязкоупругого тела с элементами электрических цепей .....	47
2.2. Конечно-элементный алгоритм решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями на основе пакета ANSYS .....	59
2.3. Апробация алгоритма .....	72
<b>Глава 3. Выбор оптимальных вариантов компоновки упругих тел пьезоэлементами .....</b>	<b>77</b>
3.1. Подбор компоновки упругих тел пьезоэлементами на основе анализа деформаций .....	77
3.2. Подбор компоновки упругих тел пьезоэлементами на основе анализа деформаций на основе анализа распределения значений электрического потенциала .....	80

3.3. Подбор компоновки упругих тел пьезоэлементами на основе анализа распределения значений коэффициента электромеханической связи .....	84
3.4. Численные примеры поиска компоновок smart-систем пьезоэлементами .....	88
<b>Глава 4. Подбор оптимальных параметров внешней электрической цепи, обеспечивающих максимальные диссипативные свойства системы .....</b>	<b>93</b>
4.1. Оптимизация диссипативных свойств smart-систем на основе пьезоэлементов на заданной моде колебаний при использовании пассивных схем внешних электрических цепей .....	93
4.2. Результаты численных экспериментов по подбору параметров внешних электрических цепей, обеспечивающих наилучшее демпфирование колебаний на заданной частоте .....	106
4.3. Мультимодальное демпфирование smart-систем на основе пьезоэлементов при использовании вариантах пассивных схем внешних электрических цепей .....	109
4.4. Использование электропроводящих композитных материалов для демпфирования колебаний smart-систем на основе пьезоэлементов .....	113
<b>Заключение .....</b>	<b>123</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>124</b>

## Введение

**Актуальность и степень разработанности темы исследования.** Воздействие на механические конструкции внешних нагрузок, изменяющихся во времени, вызывает в них ответную реакцию или отклик, который наиболее сильно проявляется в режиме резонанса. В подавляющем большинстве случаев возникновение резонансных явлений в различного рода конструкциях крайне негативно сказывается на их эксплуатационных характеристиках. В связи с этим крайне важной задачей как для проектировщиков, так и для исследователей, является разработка наиболее эффективных подходов к управлению динамическим поведением конструкций, которые позволят избежать негативных эффектов, связанных с воздействием динамических нагрузок.

Существующие на сегодняшний день подходы к управлению динамическим поведением можно разделить на активные, пассивные или полуактивные [1].

Системы или устройства для пассивного управления колебаниями, использующиеся с целью поглощения вибраций либо препятствованию их распространения, как правило состоят из упругих элементов (жесткость) и элементов диссипации (демпфер) [2]. Путем изменения параметров демпфирующей системы можно добиться ее наилучших демпфирующих свойств как на отдельных частотах, так и в некотором заданном частотном диапазоне [3-5]. Однако на практике, зачастую, реализуются режимы, при которых частота внешнего воздействия может изменяться произвольным образом, что существенно ограничивает возможности применения подобного рода устройств.

Для преодоления данных ограничений применяют системы активного управления динамическим поведением механических систем. В этом случае к системе добавляются элементы активного силового воздействия, с помощью которых на систему подается управляющее усилие согласно определенным алгоритмам, позволяющее подстраивать ее динамическое поведение под действие внешних факторов [6-8].

Комбинация активного и пассивного подходов к управлению динамическим поведением позволяет уменьшить количество энергии, подводимой к системе для достижения необходимого результата [9-11].

Первой попыткой объединить исследования динамического поведения конструкций и методик управления, которые являлись отдельными, абсолютно независимыми дисциплинами, была работа Инмана [12]. На рубеже XX-XXI веков появился ряд работ, посвященных активному управлению колебаниями [13-14], в которых была четко сформулирована связь между управлением и динамическим поведением системы. В работе

[15] Роджерсом были описаны основные элементы традиционных систем управления с обратными связями, а также была проведена аналогия между элементами такого рода систем и человеческим организмом (сенсоры – нервные окончания, актуаторы – мышцы, контроллеры – мозг). Позднее он же в [16] сделал отсылки к работе [17], ключевым аспектом которой является описание технологии, на основании которой подобного рода интеллектуальная система могла бы быть построена – это пьезоэлектричество.

В последние несколько десятилетий для проектирования эффективных систем управления динамическим поведением механических систем, стали популярными smart-технологии, главной отличительной особенностью которых является широкое применение smart-материалов, ключевым отличием которых от традиционных конструкционных является наличие связи между механическими полями (деформации, напряжения) и немеханическими полями (температура, электрическое поле, магнитное поле и т.д.) [18]. Таким образом, в наиболее широком смысле под smart-материалом понимается такой материал, который способен изменять свое механическое состояние под воздействием немеханических факторов, либо генерировать немеханический отклик при механическом воздействии.

Изделия из smart-материалов широко применяются при создании smart-конструкций в качестве чувствительных элементов или сенсоров, способных регистрировать параметры окружающей среды или текущее состояние конструкции, либо выступают в качестве элементов активного воздействия или актуаторов, которые позволяют изменять свойства конструкции в нужном направлении [19].

На сегодняшний день среди наиболее широко используемых smart-материалов можно выделить пьезоэлектрические материалы, сплавы с памятью формы, электрострикционные и магнитоэлектрические материалы, электрореологические и магнитоэологические жидкости и т.д. [1]. Анализ литературы показал, что наибольшее распространение получили элементы, выполненные из пьезоэлектрических материалов в виде сенсоров либо актуаторов. Данный факт можно объяснить тем, что пьезоматериалы обладают отличными электромеханическими свойствами: быстрый отклик, простота производства, гибкость при проектировании, малый вес, низкая стоимость, возможность работы в широком частотном диапазоне, низкое энергопотребление, отсутствие магнитного поля при преобразовании электрической энергии в механическую и т.д. [1, 18].

История применения пьезоэлектрических материалов берет свое начало в 1880 году, когда братья Пьер и Жак Кюри экспериментально обнаружили явление прямого

пьезоэлектрического эффекта - появление на поверхности тела электрических зарядов при его деформировании [20]. Годом позже, ими же экспериментально был открыт и обратный пьезоэлектрический эффект, проявляющийся в виде деформации тела при действии на него электрического поля. На сегодняшний день явление пьезоэффекта достаточно хорошо изучено и описано в ряде монографий [21-23].

К настоящему моменту известно множество материалов как естественных, так и искусственных, обладающих свойствами прямого и обратного пьезоэффекта. Так среди естественных материалов, наиболее ярко проявляющих пьезоэлектрические свойства, можно отметить кварц, бертоллегову соль, фосфат аммония и т.д. Среди наиболее распространенных синтетических пьезоэлектриков можно выделить цирконат-тианат свинца ( $\text{PbZrTiO}_3\text{-PbTiO}_3$ , также известный как ЦТС или PZT), титанат бария-стронция ( $\text{BaSrTiO}_3$ ), цирконат-тианат свинца-лантана (PLZT), поливинилиденфторид (PVDF) и полимеры на его основе и т.д. [24]

Среди искусственных пьезоэлектрических материалов наиболее широкое распространение для практических приложений получили керамические материалы на основе цитаната-титаната свинца. Физико-механические свойства данных материалов позволяют использовать их для производства различного рода пьезоэлектрических преобразователей: генераторов (устройства зажигания, твердотельные батареи), сенсоров (акселерометры и датчики давления), актуаторов (пневматические и гидравлические клапаны) и т.д. [1].

На сегодняшний день изделия из пьезоэлектрических материалов нашли широкое применение в различных областях науки и техники. Так, например, пьезоэлектрические материалы широко используются для создания систем управления динамическим поведением конструкций [14, 25-27], точного позиционирования [28-30], широко применяются в аэрокосмической отрасли [31-33], при разработке миниатюрных устройств [34-36] и т.д. В качестве примеров практических приложений пьезоэлектрических материалов также можно отметить их использование для подавления вибраций спортивного инвентаря (теннисные ракетки, лыжи, сноуборды) [37]. Очень широко пьезоматериалы используются в зарубежной авиационной военной промышленности для управления колебаниями несущих и управляющих элементов истребителей [38-40] или несущих лопастей вертолетов [41]. Также подобного рода материалы активно применяются для подавления акустического излучения глубоководных батискафов [42], снижения шума

космических ракет-носителей [43-44], демпфирования колебаний конструкций антенн [45] и т.д.

В контексте управления динамическим поведением конструкций использование элементов из пьезоэлектрических материалов дает значительные преимущества перед традиционными сенсорами (инерционные акселерометры, индукционные датчики приближения и т.д.) и актуаторами (электромагнитными, гидравлическими, пневматическими и т.д.). Элементы из пьезоэлектрических материалов могут использоваться как распределенные сенсоры или актуаторы, не внося при этом значительных изменений в массу конструкции, обеспечивая требуемую чувствительность и эффективность управления в широком диапазоне частот. Кроме того сенсорам и актуаторам, выполненным из пьезоэлектрических материалов, можно придавать необходимую форму, за счет чего можно обеспечить полную интеграцию пьезоэлементов в рассматриваемые механические системы.

При создании систем управления динамическим поведением на основе пьезоэлектрических материалов наибольшее распространение получил подход, при котором к поверхности конструкции присоединяется небольшие элементы, выполненные из пьезоэлектриков, так называемые «заплатки» или «патчи» [19]. Для активного управления колебаниями такие пьезоэлементы могут быть использованы в качестве сенсоров либо актуаторов, которые подключаются к соответствующим образом спроектированной системе обработки и усиления сигналов (контроллерам). В случае пассивного управления колебаниями пьезоэлементы, соединенные с пассивными электрическими цепями (электрическим импедансом), используются как демпферы, т.е. устройства, на которых происходит диссипация энергии.

Впервые возможность применения пьезоэлементов для управления колебаниями была показана Форвардом в 1979 г. в работе [46]. Следующие две работы [47-48], в которых он выступил соавтором, посвящены управлению ортогональными изгибными модами цилиндрической мачты. Эти работы наиболее часто отмечаются как работы, положившие начало интеллектуальным конструкциям. В данных работах фраза «электронное демпфирование» используется для описания использования пьезоэлектрических материалов с управляемой электронной обратной связью. Было показано, что колебания на двух близкорасположенных изгибных модах были эффективно задемпфированы с использованием всего лишь четырех пьезоэлементов. Описанное в данных работах управление было, по своей природе, пассивным, что в итоге привело к возникновению

новой области исследований, касающейся так называемых шунтированных пьезоэлектрических материалов. Более подробное описание данного подхода с соответствующим литературным обзором было приведено в работе [49].

Вскоре последовали работы, посвященные использованию активных схем управления. Бэйли и Хаббард в работе [25] вместо керамических пьезоэлементов использовали пленку из ПВДФ (поливинлиденфторид) в качестве распределенного актуатора для управления колебаниями консольной балки. К 1987 году концепция интеллектуальных конструкций была окончательно сформирована и приведена в работе [50], где они описывались как конструкции с распределенными актуаторами, сенсорами и обрабатываемыми сетями. Для более полного понимания всей картины использования smart-материалов от ранних работ по управлению конструкциями, далее по моделированию и управлению до конечных приложений можно обратиться к работе [51].

В общих чертах пассивное управление колебаниями можно определить как изменение динамического поведения конструкции таким образом, чтобы амплитуда колебаний была минимизирована на заданной частоте либо в заданном диапазоне частот. При этом указанные изменения должны быть реализованы таким образом, чтобы не требовалось наличие дополнительных источников питания. Наиболее популярные пассивные решения для управления колебаниями включают в себя дополнение исходной конструкции амортизаторами и/или демпферами. Оба этих устройства предназначены для отвода энергии колебаний от основной конструкции, что приводит к уменьшению амплитуд колебаний.

Устройство универсального гасителя колебаний (демпфера) подразумевает наличие некоторого элемента, в котором реализован механизм рассеивания энергии. Таким образом, при подключении демпфера к основной конструкции на колебательных режимах часть энергии будет рассеиваться в гасителе. С другой стороны, универсальный амортизатор представляет собой колебательную систему, которая способна отбирать энергию колебаний у первичной системы (то есть основной конструкции). При этом в самом амортизаторе (или отдельных его частях) может наблюдаться достаточно высокий уровень амплитуды колебаний, но для элементов основной конструкции будет наблюдаться ее снижение. Основным компонентом для успешной реализации демпферов и амортизаторов является механическая связь с основной конструкцией таким образом, чтобы значительная часть энергии конструкции могла передаваться на демпфирующее устройство.



Принципиальные схемы демпферов различаются, в основном, за счет реализованного в них механизма диссипации энергии, а также за счет способа присоединения к основной конструкции. На практике наибольшее распространение получили два наиболее распространенных варианта пассивных демпферов: универсальный вязкий демпфер, в котором сила сопротивления зависит от относительной скорости между его подвижными элементами, а диссипация энергии реализуется за счет вязкого трения, и вязкоупругий демпфер, в котором сила сопротивления зависит как от механических деформаций, возникающих в нем, так и от скорости деформации. Помимо некоторых технических аспектов, заключающихся в различных вариантах практической реализации, основное различие между описанными выше демпфирующими устройствами заключается в том, что идеальный вязкий демпфер обычно характеризуется линейным коэффициентом вязкого демпфирования, тогда как поведение вязкоупругих демпферов характеризуется комбинацией упругого деформирования и гистерезисного демпфирования. Отсюда второй тип демпфера, помимо непосредственно демпфирующего эффекта, приводит также к общему увеличению жесткости исходной системы. [1, 12-14].

Одним из аспектов управления динамическим поведением конструкций с помощью smart-материалов на основе пьезоэффекта является пассивное демпфирование колебаний. Суть данного подхода состоит в присоединении к пьезоэлектрическим элементам электрического импеданса. Данный подход также называют шунтированием пьезоэлектрических элементов. Под пассивностью в данном случае понимается отсутствие дополнительных источников питания в системе, т.е. внешний импеданс состоит только из пассивных элементов, таких как резисторы, характеризующиеся сопротивлением  $R$ , катушки индуктивности – индуктивностью  $L$  и конденсаторы – емкостью  $C$ . Основное достоинство данного подхода состоит в том, что при пассивном демпфировании не требуется наличия в управляемой системе сенсоров, и при соответствующей настройке шунта будет обеспечиваться ее устойчивое поведение.

Как правило, элементы из пьезоэлектрических материалов используются для управления динамическим поведением хорошо деформируемых конструкций. При упоминании использования пьезоэлементов для управления динамическим поведением наиболее часто подразумевается именно активное управление. В этом случае используются как минимум два пьезоэлемента, один из которых играет роль сенсора, сигнал с которого пропускается через устройство обработки сигналов (контроллер) и подается на второй пьезоэлемент, выполняющий функции актуатора.

Традиционные подходы к анализу электромеханических систем с пьезоэлектрическими элементами основаны на теории управления и тесно связаны с такими понятиями как передаточная функция, управляемость и наблюдаемость. Передаточной функцией системы называют дробно-рациональную функцию, представляющую собой отношение преобразования Лапласа выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного, при нулевых начальных условиях и нулевых внешних возмущениях. Наблюдаемость в теории управления – свойство системы, показывающее, можно ли по выходу полностью восстановить информацию о состояниях системы. Управляемость – одно из важнейших свойств системы управления и объекта управления, описывающее возможность перевести систему из одного состояния в другое [12-13]. Передаточные функции подобного рода деформируемых систем обладают рядом интересных свойств. Так, например, различные передаточные функции, относящиеся к одной и той же конструкции, имеют одинаковые полюса, которые являются нулями характеристического полинома числителя передаточной функции. Корни характеристических полиномов числителя и знаменателя передаточной функции в общем случае являются комплексными, а в силу того, что рассматриваемые системы имеют большое количество полюсов, расположенных близко к мнимой оси ( $i\omega$ ), нули и полюса данных систем могут накладываться друг на друга [52].

Однако некоторые свойства упругих систем делают задачу управления их динамическим поведением достаточно нетривиальной проблемой. Так, например, в силу того, что передаточные функции подобных систем являются функциями достаточно высокого порядка, использование управляющего механизма, разработанного для управления модами колебаний, расположенными в достаточно узком частотном диапазоне, при наличии мод, выходящих за рамки выбранного диапазона, может привести к дестабилизации системы и ее выходу из строя. Кроме того, для подобного рода управляющих устройств также существует проблема избыточной наблюдаемости и управляемости, что также может приводить к неустойчивой работе системы [53-54].

Несмотря на все существующие сложности, на сегодняшний день существует ряд подходов, позволяющих проектировать высокопроизводительные контроллеры, которые позволяют снизить уровень конструкционных колебаний, обеспечивая при этом, устойчивую работу управляемой системы. Одним из таких подходов, например, является использование со-расположенных пар сенсор-актуатор (когда сенсор и актуатор находятся друг напротив друга, но расположены с разных сторон относительно поверхности конструкции), для которых разработан ряд эффективных методик управления [52].

При использовании со-расположенных пар пьезоэлементов одним из наиболее распространенных вариантов контроллеров является Velocity feedback controller, который обладает хорошей устойчивостью в случае использования со-расположенных пар сенсор-актуатор [53-55]. Несмотря на то, что данный контроллер чувствителен к избытку управляемости, этот избыток не приводит к неустойчивости системы. Однако данный вид контроллера имеет серьезные недостатки, одним из которых является очень широкая полоса пропускания, а также способность передачи ненужного управляющего воздействия на частотах, находящихся вдали от резонансных частот. Зачастую данный тип контроллера перестает работать на высоких частотах, за счет чего усиливается динамический отклик на низших частотах. Особое внимание следует уделять динамическому поведению контроллера, поскольку добавление в него дополнительных элементов может привести к неустойчивости на частотах, не входящих в диапазон.

Резонансные контроллеры являются аппроксимацией контроллеров с обратной связью по скорости на резонансных частотах и в некоторой их окрестности [56]. В отличие от контроллеров с обратной связью по скорости их управляющие воздействие практически отсутствует на остальных частотах. Тем не менее, для их стабильной работы требуются те же условия, что и для контроллеров с обратной связью по скорости. В литературе известны относительно похожие подходы к управлению [14], однако все они применимы для управления всего лишь одной формой колебаний, и не могут рассматриваться для управления системами со многими параметрами.

Контроллер с положительной обратной связью по положению, впервые предложенный в работе [57], нашел широкое применение для различных задач управления динамическим поведением конструкций [52]. По сравнению с резонансными контроллерами их действие быстро затухает за пределами управляемого частотного диапазона и позволяют добиться более высокой производительности.

Критерии устойчивости для систем с контроллерами с положительной обратной связью по положению, как показано в [57], не позволяют распространять действие контроллера на моды, находящиеся за пределами управляемого частотного диапазона. Соответственно, наличие таких мод может привести к неустойчивости замкнутой системы. С учетом всего вышесказанного, свойство естественного затухания такого контроллера на высших частотах может быть использовано для того, чтобы избегать описанных выше эффектов для мод, находящихся вне управляемого частотного диапазона.

Все методики управления, описанные выше, разработаны для конструкций с присоединенными к их поверхности со-расположенными сенсорами и актуаторами. В такого рода системах пьезоэлемент может выполнять только одну функцию – либо сенсора, либо актуатора. Тем не менее, существует возможность использования этих пьезоэлементов одновременно и как сенсоров, и как актуаторов, однако в этом случае требуется наличие так называемых само-чувствительных цепей, которые позволяют одному и тому же пьезоэлементу одновременно выполнять функции и сенсора, и актуатора. Данный подход может позволить существенно сократить количество необходимых пьезоэлементов, однако при его использовании существует ряд проблем, усложняющих это.

Для тонких гибких конструкций, таких как балки, плиты, оболочки и панели, большая часть энергии колебаний приходится на изгиб, и, таким образом, представляется целесообразным использовать участки и/или слои функциональных материалов, которые могут изгибаться (деформироваться) вместе с конструкцией и способны извлекать (преобразовывать) эту энергию из деформации основной конструкции. С этой целью пьезоэлектрические материалы являются интересным выбором, поскольку они достаточно эффективны в преобразовании энергии деформации в электрическую энергию. При подключении к правильно спроектированным электрическим цепям эта электрическая энергия затем может быть извлечена из пьезоэлектрического материала. В основополагающей работе Хагуда и фон Флотова [58] было предложено использовать пьезоэлектрические элементы, соединенные с резистивными шунтирующими цепями, в которых электрическая энергия рассеивается в сопротивлении цепи, или же с резонансным (состоящим из резистивного и индуктивного элементов) шунтирующими цепями. В первом случае, влияние на динамическое поведение системы оказалось эквивалентным случаю присоединения классического вязкого демпфера, а во втором случае наблюдался эффект, аналогичный использованию вязкоупругого демпфера (в котором электрическая энергия поглощается цепью в узком диапазоне частот).

Несмотря на то, что впервые идея шунтирования пьезоэлектрических элементов была опубликована в [46], основной вклад в развитие данного подхода внесли Хагуд и фон Флотов [58]. В этой работе они показали, что за счет присоединения к пьезоэлементу последовательной  $RL$ -цепи можно существенно подавить колебания на одной заданной частоте. Отмечалось, что за счет того, что пьезоэлемент обладает собственной емкостью, он, совместно с присоединенной цепью, образует резонансный контур. Варьируя параметры элементов внешней цепи, можно подобрать их таким образом, чтобы частота

резонансного контура совпадала с какой-либо из частот конструкции. За счет такой «настройки» внешней цепи можно осуществить демпфирование колебаний на данной частоте.

Дальнейшие исследования в данном направлении были сосредоточены в основном на оптимизации шунтирующих цепей путем включения сопротивлений, индуктивностей, емкостей и переключателей последовательно и/или параллельно [59-63]. Другие исследования были сосредоточены на оптимизации электромеханической связи между пьезоэлектрическими материалами и основной конструкцией [64-66]. Согласно классификации, приведенной в [52], все электрические цепи можно в общем разделить на две группы: линейные и нелинейные. Линейность в данном случае подразумевает что связь между током и напряжением в цепи, состоящей из пьезоэлемента и шунтирующей цепи является линейной на всем частотном диапазоне.

Самыми простыми вариантами линейных шунтирующих цепей являются резистивная цепь, состоящая из одного резистора [58] и емкостная цепь, состоящая только из конденсатора [67]. При этом отмечается, что при использовании резистивной цепи поведение конструкции, с зашунтированным такой цепью пьезоэлементом, становится аналогично тому, как если бы весь материал конструкции обладал вязкоупругими свойствами [58]. Что касается емкостной цепи, то ее применение в качестве шунтирующей для демпфирования колебаний является нецелесообразным, в силу отсутствия механизмов диссипации, но при этом данная цепь может влиять на жесткостные свойства пьезоэлемента, и как следствие, изменять резонансные частоты [67].

Однако широкое распространение получили так называемые резонансные цепи, как наиболее эффективные в задачах гашения колебаний. Отличительной особенностью данных цепей является обязательное наличие индуктивного элемента. Впервые такого вида шунтирующая цепь была предложена Форвардом в [68] и представляла собой последовательное соединение катушки индуктивности и конденсатора. При присоединении данной цепи к пьезоэлементу была оказана возможность подавления колебаний за счет использования пьезоэлектрических материалов.

Классическим примером резонансной цепи является цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора и катушки индуктивности, подробно описанная в [58]. Авторы сравнивали поведение системы с зашунтированным такой цепью пьезоэлементом с поведением системы с механическим демпфером с дополнительной массой. В [69] был предложен еще один вариант резонансной цепи, в которой резистор и

катушка индуктивности соединялись параллельно. Отмечалось, что при практически одинаковой производительности последовательной и параллельной цепи, параллельная цепь является менее чувствительной к точности настройки.

Однако, несмотря на всю кажущуюся простоту, при практической реализации демпфирования колебаний с помощью резонансных цепей возникает серьезная проблема, связанная с использованием индуктивных элементов. Дело в том, что для подавления колебаний конструкций на низких частотах значения индуктивности для резонансных шунтов может составлять десятки тысяч генри, что требует использования очень больших катушек индуктивности, а это, в свою очередь, крайне негативно сказывается на массогабаритных характеристиках конструкции. Одним из вариантов решения данной проблемы является использование гираторов, являющихся электронными аналогами катушек индуктивности [70].

Как уже было отмечено выше, подходы к управлению динамическим поведением систем с помощью пьезоэлектрических элементов можно условно разделить на пассивные и активные. В последние десятилетия также получили широкое распространение полупассивные или полуактивные подходы. Анализ литературы показал, что простейшими из них являются пассивные системы управления, использующие пьезоэлектрический элемент, зашунтированный резистивно-индуктивной электрической  $RL$ -цепью [46, 58, 71-75]. Однако основным недостатком данного подхода является сильная зависимость демпфирующих свойств от характеристик системы, при которой малейшее изменение параметров системы приводит к падению уровня демпфирования. Кроме того, эти системы требуют высоких значений сопротивления резистивных элементов для демпфирования колебаний на низких частотах. С другой стороны, активные системы управления [76-78] являются высокоэффективными для демпфирования низкочастотных колебаний; однако они требуют наличия дополнительных источников энергии, большого усилителя мощности и высокопроизводительных цифровых сигнальных процессоров для актуаторов, что в большинстве практических ситуаций невозможно.

В последнее время привлекательным вариантом для демпфирования колебаний, позволяющим преодолеть недостатки пассивных и активных систем управления, оказались полупассивные и полуактивные системы управления. Их преимущества по сравнению с методами активного управления включают возможность эффективной работы на более высоких частотах. При этом, по сравнению с пассивным управлением, смешанный подход позволяет обеспечить работу в широкополосном режиме и меньшее потребление энергии.

За последние два десятилетия были предложены различные законы регулирования для систем управления динамическим поведением конструкций с использованием пьезоэлектрических материалов, которые использовались для различных практических приложений.

Сунар и Рао [79] дали всесторонний обзор практического использования прямого и обратного пьезоэффекта в задачах, связанных с регистрацией различных параметров, а также управления динамическими характеристиками упругих конструкций. В работе [80] был проанализирован весь имеющийся на тот момент исследовательский опыт и были спрогнозированы будущие перспективы в отношении полуактивных и активно-пассивных подходов к демпфированию колебаний на основе уникальных свойств пьезоэлементов.

В [81] была предпринята первая попытка изучить и систематизировать достижения в области конечно-элементного моделирования smart-конструкций за последнее десятилетие. Были выявлены потенциальные пробелы и определены будущие направления. Ранее рассматривавшиеся по отдельности, активные (на основе пьезоэлементов) и пассивные (на основе вязкоупругих элементов) методики управления также были объединены, чтобы сформировать гибридные элементы управления для демпфирования колебаний конструкций. Этот унифицированный подход обеспечивал широкополосное управление и использовал преимущества как активных (высокая производительность, адаптивность), так и пассивных (надежность, низкая стоимость, простота реализации) систем. В работах [82-83] авторы сосредоточили внимание на последних достижениях в области геометрических конфигураций, подходов к моделированию и алгоритмов управления этими гибридными методами активного и пассивного демпфирования. Мохеймани [61] представил обзор демпфирования и управления динамическим поведением с использованием шунтированных пьезоэлектрических элементов и исследовал сходство между пассивным демпфированием за счет шунтированных пьезоэлементов и активным демпфированием с помощью со-расположенных пар сенсоров и актуаторов. Он также продемонстрировал, что проблему управления колебаниями на основе шунтированного пьезоэлектрика можно рассматривать как конкретную проблему управления с обратной связью.

Пьезоэлектрические материалы также широко используются в задачах сбора и накопления энергии путем преобразования энергии колебаний от объектов окружающей среды. Содано и др. [84] исследовали возможности и эффективность сбора энергии за счет преобразования механической энергии колебаний в электрическую с помощью

пьезоэлектриков, а также аспекты ее накопления за счет использования различных вариантов электрических цепей. Далее, в [85] были проведены исследования, связанные с повышением эффективности сбора энергии на основе пьезоэлементов путем анализа физических и геометрических конфигураций, адаптивных схем и методов отвода энергии. В статье [86] авторы обсудили возможность использования собранной с помощью пьезоэлементов энергии для обеспечения питания систем управления динамическим поведением. Сонг и др. [87] рассмотрели применение пьезоэлектрических материалов для демпфирования колебаний в балках, фермах, стальных каркасах и вантовых мостах. Были также обсуждены преимущества пьезоэлектрических материалов, а также ограничения для фактического применения этих материалов в гражданских сооружениях. В статье из двух частей, посвященной современному состоянию проблемы управления динамическим поведением с помощью пьезоэлементов [88, 89], авторы рассмотрели активные, полуактивные и гибридные средства управления, использующие различные системы в конструкциях гражданского назначения, и обсудили различные варианты реализаций стратегии управления.

Описанные выше пассивные подходы на основе использования шунтирующих цепей зачастую позволяют демпфировать колебания только на одной частоте. Однако на практике возникает проблема демпфирования колебаний в некотором частотном диапазоне, включающем, как правило, несколько собственных частот колебаний конструкции. В литературе подход к гашению колебаний конструкций на нескольких частотах получил название мультимодального демпфирования [52]. На сегодняшний день можно выделить три основных подхода к мультимодальному демпфированию:

1. Использование нескольких независимых зашунтированных пьезоэлементов [90-91]. Это один из самых простых вариантов реализации мультимодального демпфирования с точки зрения настройки шунтирующих цепей, поскольку каждый зашунтированный пьезоэлемент может рассматриваться как независимая система. Однако у данного подхода есть один существенный недостаток: использование большого числа пьезоэлементов может крайне негативно сказаться как на массе, так и на динамическом поведении конструкции.

2. Использование одного пьезоэлемента и сложной внешней электрической цепи [73, 92-95]. Как правило, сложная цепь составляется из нескольких простых резонансных цепей (последовательных либо параллельных). Данный подход более предпочтителен по сравнению с предыдущим, поскольку в этом случае мультимодальное демпфирование реализуется с помощью только одного пьезоэлемента. Однако при этом настройка такой



цепи на подавление конкретных резонансов является достаточно нетривиальной задачей в силу того, что все входящие в нее простые резонансные шунты влияют друг на друга и не могут рассматриваться как независимые. Для того, чтобы изолировать их друг от друга, обычно прибегают к использованию дополнительных элементов — проводящих [92] либо блокирующих цепей [73,95].

3. Применение нескольких пьезоэлементов, соединенных с одной общей внешней электрической цепью [97-100]. Поскольку в данном случае внешняя цепь является общей для всех пьезоэлементов, они оказываются связанными между собой и образуют единую сеть. Данный подход интересен тем, что за счет использования нескольких пьезоэлементов существенно повышается отдача энергии в шунтирующую цепь, что приводит к существенному увеличению степени демпфирования колебаний. Однако, данный подход обладает недостатками двух описанных выше: увеличение массы конструкции и сложность настройки внешней цепи.

При использовании для демпфирования колебаний линейных шунтирующих цепей основной задачей является определение значений оптимальных параметров для элементов, из которых составлен шунт. В [58] для отыскания оптимальных параметров предлагается два способа, основанные на анализе передаточной функции системы с шунтированным пьезоэлементом. Первый основан на использовании полной передаточной функции системы и предполагает отыскание таких параметров внешней цепи, при которых степень демпфирования системы будет максимальной. Второй способ основан на анализе поведения полюсов передаточной функции и обеспечивает нахождение параметров, при которых частоты конструкции и резонансного контура будут совпадать.

Анализ литературы показал, что несмотря на то, что данные способы подбора оптимальных параметров были предложены более тридцати лет назад, до сих пор они остаются самыми простыми и эффективными для использования [46-100]. С одной стороны, у данных подходов есть большое преимущество - с их помощью можно получить аналитическое решение, на основе которого в явном виде выводятся выражения для оптимальных значений параметров шунтирующей цепи, но имеется и существенный недостаток — каждый раз при решении задачи необходимо строить передаточную функцию системы, что в случае сложных пространственных конструкций будет являться достаточно нетривиальной задачей. По большому счету, именно этим можно объяснить тот факт, что в большинстве работ рассматриваются простые конструкции типа балок и пластинок.

При демпфировании колебаний с помощью пьезоэлементов крайне важной является проблема их размещения по отношению к конструкции. В случае использования активных демпфирующих систем с обратными связями, включающих в себя и сенсоры и актуаторы, нахождение оптимального места расположения является достаточно нетривиальной задачей. Более того, неправильное размещение пьезоэлементов в такого рода системе может привести к избыточной наблюдаемости и управляемости, что ведет к потере устойчивости и, в конечном итоге, выводе конструкции из строя [53-54]. В работе [101] приводится большой литературный обзор, касающийся вопросов оптимизации размещения пьезоэлементов в конструкциях при их использовании для активного гашения колебаний.

Системы с пассивно-зашунтированными пьезоэлементами, в силу отсутствия элементов обратной связи, лишены недостатков, присущих активным системам [52], но и для них проблема оптимизации месторасположения пьезоэлементов является весьма актуальной. Поскольку внешняя шунтирующая цепь является устройством, в котором происходит диссипация энергии, эффективность демпфирования будет напрямую зависеть от энергии, генерируемой пьезоэлементом при его деформации. Так в работах [102, 106] предлагается производить оценку эффективности работы пьезоэлемента в конструкции по величине энергии деформации. При этом в [102] также приводятся оценки эффективности по величине генерируемого на пьезоэлементе заряда, а в [106] — относительной величины электрического потенциала. Однако наиболее общей характеристикой, определяющей энергетическую производительность пьезоэлемента, присоединенного к конструкции, является обобщенный коэффициент электромеханической связи, который определяется как

$$K = \sqrt{\frac{f_{o/c}^2 - f_{s/c}^2}{f_{s/c}^2}} \quad \text{где } f_{o/c}, f_{s/c} \text{ — частоты колебаний конструкции в режиме холостого хода}$$

(open circuit или o/c) и в режиме короткого замыкания (short circuit или s/c) [102-106]. Квадрат этого коэффициента определяет процентное соотношение механической энергии колебаний преобразованной в электрическую. Соответственно, чем выше значение данного коэффициента, тем больше электрической энергии генерируется пьезоэлементом при его деформации и может быть рассеяно на элементах шунтирующей цепи.

При анализе динамики конструкций основными параметрами, характеризующими их динамическое поведение, являются собственные частоты и формы колебаний. Присоединение к конструкциям пьезоэлементов может существенно сказываться как на собственных частотах, так и на формах колебаний [106]. Более того, при присоединении к

пьезоэлементу внешней резонансной цепи в спектре собственных частот возникает дополнительная частота [58]. В этой связи крайне важно знать, как ведут себя собственные частоты колебаний конструкций с присоединенными к ним пьезоэлементами и внешними электрическими цепями в зависимости от различных факторов.

Несмотря на всю важность данной проблемы, анализ литературы показал, что на сегодняшний день работы, посвященные исследованию поведения собственных частот и форм колебаний конструкций с пьезоэлементами и внешними электрическими цепями исчисляются единицами [107-114]. В работах [107-112] предлагается два подхода к определению собственных частот колебаний. Первый подход основан на решении задачи о собственных колебаниях электроупругих или электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями в полной постановке методом конечных элементов [107]. Второй подход также основан на решении задачи о собственных колебаниях, но не для самой конструкции, а для ее дискретного электрического аналога, представляющего собой эквивалентную электрическую схему замещения [108]. С точки зрения получаемых результатов данные подходы абсолютно эквивалентны [108].

Подходы к моделированию на основе моделей как с сосредоточенными параметрами, так и с распределенными параметрами использовались различными исследователями для прогнозирования электромеханического поведения электромеханических систем с пьезоэлементами, шунтируемыми электрическими цепями, для оптимального демпфирования и управления динамическим поведением. Ларсон и Роджерс [117] вывели соотношения для модели с сосредоточенными параметрами для прогнозирования изменений частоты между резонансными состояниями для акустического преобразователя на пьезоэлектрической основе с переключением состояний для применений в системах, частично или полностью погруженных в жидкость. Davis & Lesieutre [116] разработали модель с сосредоточенными параметрами для пассивного демпфера с шунтирующей цепью, в которой была изменена эффективная жесткость пьезоэлектрического элемента. Это, в свою очередь, привело к изменению собственной частоты устройства в соответствии с изменением частоты основной конструкции. Также были выведены математические соотношения для эффективной жесткости пьезоэлектрических элементов. Простая модель с сосредоточенными параметрами была разработана авторами в работе [118] для полупассивной системы демпфирования с шунтирующей цепью. Было показано, что разработанная модель работала в 100 раз быстрее по сравнению с моделированием на основе конечных элементов, реализованном в пакете

ANSYS. Моделирование на основе систем с сосредоточенными параметрами для демпфирования динамического поведения систем с зашунтированными пьезоэлементами также эффективно использовалось многими другими исследователями [115, 119-121]. В качестве альтернативы в работе [58] было предложено использовать модель с распределенными параметрами, построенную на обобщенной версии принципа Гамильтона с формулировками Рэля-Ритца, для получения уравнений движения электроупругого континуума, содержащего элементы из пьезоэлектрических материалов. Применение этой обобщенной модели было эффективно использовано для частного случая консольной пластины с пьезоэлементом, шунтируемым электрическими цепями. Гипотезы балочной теории Эйлера-Бернулли были использованы в [122-124] для моделирования электромеханического поведения консольной конструкции с зашунтированными пьезоэлементами. В статье [125] авторами было выявлено несколько упрощенных и неверных гипотез, сделанных в литературе, касающихся электромеханического моделирования пьезоэлектрических устройств для сбора и накопления энергии, от использования моделей с низкой точностью до неправильного моделирования кинематики, а также использования статических соотношений в фундаментальной динамической задаче. Были внесены поправки в понятие пьезоэлектрической связанности, и был получен улучшенный вариант модели с распределенными параметрами в качестве альтернативы моделям с сосредоточенными параметрами с одной степенью свободы для более точного прогнозирования динамического поведения устройств сбора и накопления энергии на основе пьезоэлементов.

Решение проблемы эффективного применения пьезоэлектрических материалов в различных областях науки и техники практически невозможно без использования численного математического моделирования. Первые работы, посвященные численному исследованию динамики пьезоэлектриков на основе метода конечных элементов, относятся к началу 70-х годов XX века [126]. С тех пор вышло множество работ, посвященных численному моделированию поведения конструкций с элементами из пьезоэлектрических материалов. В работах [127-128] собрано и систематизировано порядка 2000 статей по применению метода конечных элементов к анализу и моделированию smart-материалов и конструкций за период с 1986 по 2002 год. На сегодняшний день, в связи с широким развитием возможностей прикладных пакетов конечно-элементного анализа, для моделирования поведения конструкций с пьезоэлементами многие исследователи активно используют возможности таких пакетов как ANSYS [129-131], NASTRAN [132], ABAQUS

[133]. Тем не менее, возможности существующих пакетов, зачастую, оказываются недостаточными для решения конкретных задач, что приводит к необходимости разработки собственных конечно-элементных алгоритмов [104, 107].

Все работы в данной области можно разделить на три основные группы, в зависимости от типа используемых конечных элементов: пластинчатые и оболочечные элементы, элементы типа solid-shell (толстостенные оболочки) и классические трехмерные конечные элементы [134]. Пластинчатые и оболочечные конечные элементы традиционно используются для анализа тонкостенных конструкций [135-137]. Использование данных типов конечных элементов позволяет существенно снизить вычислительные затраты. Данные конечные элементы основаны на соотношениях теории сдвиговых деформаций первого порядка, либо на теории Рейсснера-Миндлина и не учитывают изменения полевых характеристик по толщине. Также в рамках пластинчатых и оболочечных элементов широкое распространение получили так называемые слоистые элементы [138]. Оригинальная конечно-элементная формулировка, которая подходит для решения связанных электромеханических задач для любых упругих конструкций, на поверхности которых расположены пьезоэлементы, приведена в работе [139]. Особенность данной формулировки состоит в том, что электрическое поведение пьезоэлемента описывается с помощью всего двух узловых неизвестных по электрической компоненте. Эта формулировка хорошо подходит для практических приложений в силу того, что с ее помощью очень легко описываются реальные электрические граничные условия, такие как эквипотенциальность на электродах. Глобальные переменные также естественным образом адаптированы для того, чтобы учитывать внешнюю электрическую цепь произвольной конфигурации, что позволяет моделировать эффект демпфирования колебаний с помощью внешней цепи.

За последние 2 десятилетия был предложен ряд формулировок новых конечных элементов типа solid-shell [140-141]. Данные элементы основаны на специальных кинематических соотношениях, позволяющих учитывать изменение искомых величин по толщине. Являясь неким компромиссом между трехмерными и оболочечными элементами, данные элементы позволяют существенно сократить вычислительные затраты, но при этом имеют преимущество перед традиционными оболочечными элементами в силу того, что для описания элементов solid-shell используются трехмерные определяющие соотношения [142]. Из последних работ, посвященных элементам типа solid-shell, можно отметить работы [143-144].

В общем случае, для изучения различных пьезоэлектрических конструкций (как тонкостенных, так и толстостенных) разработаны классические трехмерные пьезоэлектрические конечные элементы первого и второго порядка [145-146]. Однако исследователи предпочитают избегать использования данных типов конечных элементов, в особенности элементов первого порядка. Это объясняется тем, что хотя данные элементы и описывают полностью все электромеханические эффекты в силу использования трехмерных определяющих соотношений, их использование приводит к большим вычислительным затратам.

Все описанные выше варианты конечно-элементных формулировок также позволяют моделировать присоединенную к электродам пьезоэлемента внешнюю электрическую цепь. Для моделирования элементов внешней цепи также используются специальные двухузловые конечные элементы с линейной аппроксимацией узловых неизвестных, в качестве которых выступает электрический потенциал. Описание данных конечных элементов можно найти в работе [147].

Исследования динамического поведения smart-конструкций, основанных на использовании пьезоэлементов, соединенных с внешними электрическими цепями, большим числом исследователей проводятся с помощью алгоритмов, в той или иной мере реализованных в коммерческих пакетах программ инженерных расчетов (MatLab, ANSYS, Abaqus, MSC NASTRAN и т.д.) [148-151].

При анализе электромеханических систем методом конечных элементов с использованием вычислительных инженерных пакетов программ традиционно рассматриваются три вида задач: задача о собственных колебаниях (модальный анализ), задача о вынужденных установившихся колебаниях (гармонический анализ) и задача о неустановившихся (переходных) процессах [152].

Демпфирующие свойства систем могут оцениваться по величине амплитуды при резонансном режиме или по скорости переходных процессов. В первом случае решается задача о вынужденных установившихся колебаниях, во втором – динамическая задача с начальными условиями. Эти задачи малоэффективны при оптимизации динамических характеристик в силу следующих причин. Во-первых, для получения амплитуд при резонансных режимах на основе решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях требуется ее многократное решение при различных частотах внешних воздействий. Во-вторых, при использовании задачи о вынужденных установившихся колебаниях или задачи с начальными условиями найденные оптимальные параметры

связаны с моделируемым вариантом нагружения исследуемой системы, при изменении условий нагружения они могут также изменяться.

В связи с этим задача о собственных колебаниях является более удобным инструментом для анализа динамического поведения электромеханических систем (конструкций с пьезоэлементами и внешними электрическими цепями), так как получаемые в результате решения данной задачи динамические характеристики (комплексные собственные частоты колебаний системы) не зависят от вида внешнего воздействия, и в рамках решения оптимизационных задач не требуется многократных просчетов при одних и тех же значениях искомых параметров, как, например, при построении амплитудно-частотных характеристик в задаче о вынужденных установившихся колебаниях.

**Цели и задачи.** Целью работы являются новая математическая постановка задач о собственных колебаниях и о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними пассивными электрическими цепями; построение алгоритмов их численной реализации на основе метода конечных элементов (МКЭ); оптимизация диссипативных свойств smart-систем на основе пьезоэлементов с внешними электрическими цепями с использованием результатов решения задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в следующем:

1. Предложена новая математическая постановка задачи о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними пассивными электрическими цепями различной конфигурации.
2. Разработан конечно-элементный алгоритм численной реализации рассматриваемых задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругих тел с элементами электрических цепей на основе использования подпрограмм коммерческого пакета конечно-элементного анализа ANSYS.
3. Предложен алгоритм поиска параметров smart-систем на основе пьезоэлементов, обеспечивающих ее максимальные электромеханические характеристики.
4. Продемонстрированы возможности задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях для поиска вариантов smart-систем на основе пьезоэлементов и элементов электрических цепей с максимальными демпфирующими свойствами при свободных и вынужденных колебаниях.
5. Предложен новый вариант построения smart-систем на основе пьезоэлементов и электропроводящих материалов и продемонстрирована возможность

использования электропроводящих свойств деформируемых тел для дополнительного демпфирования, в том числе — мультимодального демпфирования.

**Методология и методы исследования.** Математическая постановка задачи о собственных колебаниях формулируется на основе вариационных принципов механики сплошных сред с использованием метода Галеркина. Алгоритм численного решения рассматриваемых задач разработан на основе метода конечных элементов, реализованного в авторских программах с применением ряда подпрограмм из коммерческого пакета ANSYS. Для решения неклассической алгебраической проблемы комплексных собственных значений, к которой сводится задача о собственных колебаниях при применении процедур МКЭ, используется метод Мюллера в комбинации с принципом аргумента. Анализ зависимостей динамических характеристик исследуемых объектов и оптимизация диссипативных свойств проводятся на основе метода сканирования.

**Достоверность полученных результатов** полученных результатов подтверждена: численными экспериментами, демонстрирующими асимптотическую сходимость решения на основе метода конечных элементов при увеличении степени дискретизации; сопоставлением характеристик динамического поведения рассматриваемых систем, полученных на основе решения задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях; сопоставлением с результатами, полученными другими методами.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость работы заключается в новой математической постановке задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями.

Практическая значимость работы состоит в алгоритмах решения задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях smart-систем, представляющих собой упругие и вязкоупругие тела с пьезоэлементами и элементами электрических цепей, которые позволяют найти параметры системы, обеспечивающие максимальные диссипативные свойства при свободных и вынужденных колебаниях.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Математическая постановка задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями различной конфигурации.
2. Алгоритм численной реализации предложенной математической постановки задач о колебаниях электровязкоупругих тел методом конечных элементов с



использованием подпрограмм из пакета прикладных программ конечно-элементного анализа ANSYS.

3. Численные результаты решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями.

4. Алгоритм поиска компоновки вязкоупругих тел пьезоэлементами, обеспечивающий максимальные электромеханические свойства электровязкоупругого тела.

5. Результаты поиска параметров smart-систем на основе пьезоэлементов и элементов электрических цепей с максимальными демпфирующими свойствами при свободных и вынужденных колебаниях.

6. Вариант smart-систем на основе пьезоэлементов и электропроводящих деформируемых материалов, демонстрация его возможностей для дополнительного демпфирования, в том числе — мультимодального демпфирования.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты, изложенные в диссертации, были представлены в виде устных и стендовых докладов на следующих конференциях:

– Всероссийская конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, Россия, 16-21 июня 2014 г.);

– XXIII, XXIV, XXV, XXVI Всероссийские школы-конференции молодых ученых и студентов Математическое моделирование в естественных науках (Пермь, Россия, 2014, 2015, 2016, 2017 гг.);

– XIX, XX, XXI Зимние школы по механике сплошных сред (Пермь, Россия, 2015, 2017, 2019 гг.);

– Всероссийская научная конференция «Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций» (Пермь, Россия, 17-19 июня 2015 г.);

– 9th European Solid Mechanics Conference, July 6-10, 2015, Madrid, Spain (9 Европейская конференция по механике твердого тела, 6-10 июля 2015, Мадрид, Испания);

– XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, Россия, 20-24 августа 2015г.);

– ECCOMAS Congress 2016 VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Crete Island, Greece, June 5–10, 2016 (VII Европейский конгресс по вычислительным методам в прикладных науках и инженерии, о. Крит, Греция, 5-10 июня 2016г.);

- Advanced Problems in Mechanics XLIV and XLV International Summer School-Conference Saint-Petersburg, Russia (Актуальные проблемы механики, XLIV и XLV международные летние школы-конференции, Санкт-Петербург, Россия, 2016, 2017 гг.);
- 8<sup>th</sup> ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials (SMART 2017), June 5-8, 2017, Madrid, Spain (8й Тематический конгресс по смарт-материалам и конструкциям, Мадрид, Испания, 5-8 июня 2017г.);
- X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (18-22 сентября 2017 г. Самара, Россия);
- 7th International Symposium on Aircraft Materials, 24-26 April 2018г., Compiègne, France, 2018 (7й международный симпозиум по авиационным материалам, Компьен, Франция, 24-26 апреля 2018г.);
- IX ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials SMART 2019, 8-11 July, Paris, France (IX Тематическая конференция по смарт-материалам и конструкциям, 8-11 июля 2019, Париж, Франция);
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, Россия, 19-23 августа 2019 г.)
- XIII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, Россия, 9-13 декабря 2019г.).

**Публикации по теме диссертации.** Всего по теме диссертации опубликовано 48 работ, в том числе 11 статей в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, 2 статьи в виде глав в коллективных монографиях, 20 статей в прочих журналах, сборниках научных трудов и материалах конференций; 15 работ — в виде тезисов конференций.

**Личный вклад автора.** Разработка математической постановки задачи (совместно с научным руководителем); разработка алгоритма, позволяющего извлекать из конечно-элементного пакета ANSYS глобальные ансамблированные матрицы жесткости, масс и матрицы для электрической цепи для произвольной конструкции; разработка и реализация соответствующих программ на ЭВМ; проведение вычислений и анализ результатов.

**Структура и объем работы.** Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (179 наименований). Работа содержит 38 рисунков и 16 таблиц. Объем диссертации составляет 139 страниц.

**Благодарности.** Автор диссертационной работы выражает благодарность научному руководителю д.т.н., профессору, академику РАН Матвеевко В.П. а также д.ф.-м.н. Роговому А.А., к.ф.-м.н. Юрловой Н.А., к.т.н. Севодиной Н.В. и к.ф.-м.н. Лекомцеву С.В.

# Глава 1. Математическая постановка задачи о колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими элементами

## 1.1. Общая постановка задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях

Объектом исследования является кусочно-однородное тело объемом  $V = V_1 + V_2$  (рис.1.1), где объем  $V_1 = \sum_{n=1}^N V_1^n$  состоит из  $N$  однородных электроупругих (пьезоэлектрических) элементов, а объем  $V_2 = \sum_{m=1}^M V_2^m$  – из  $M$  однородных упругих или вязкоупругих элементов.

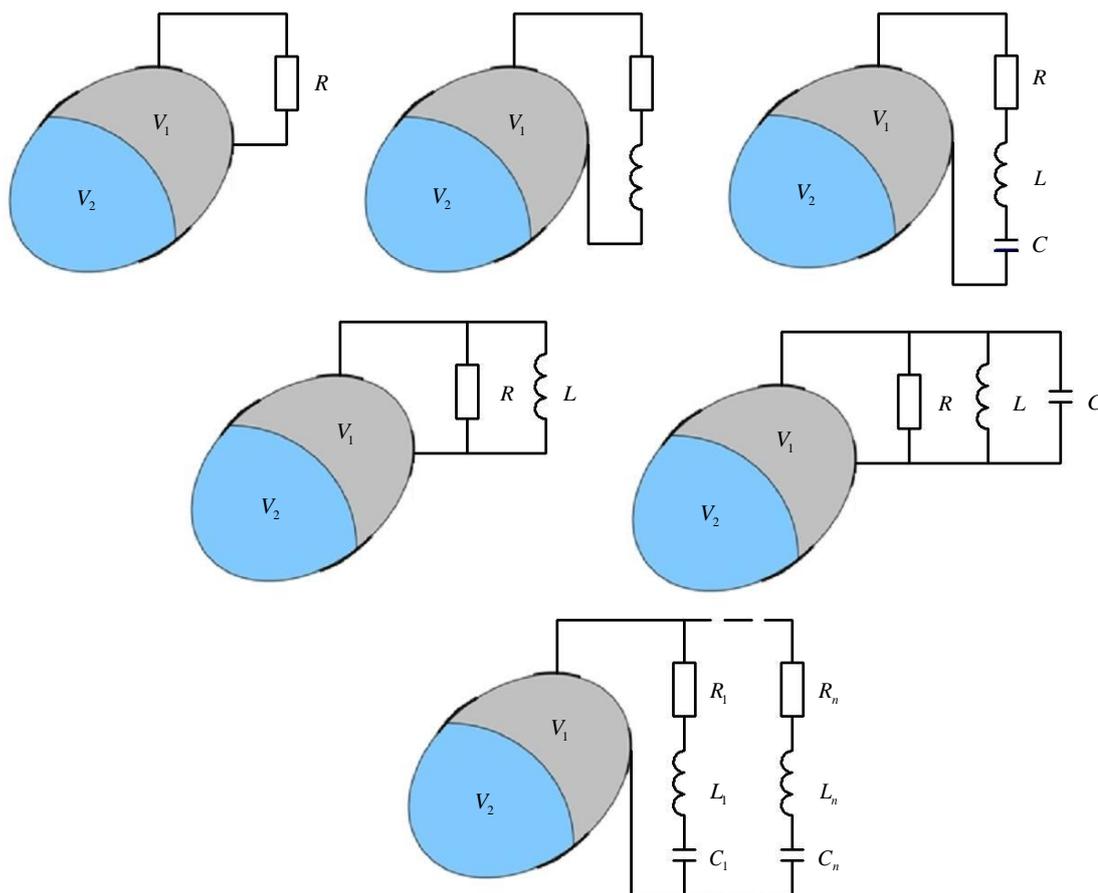


Рисунок 1.1 – Кусочно-однородные электровязкоупругие тела с различными вариантами внешних цепей, состоящих из электрических элементов.

Через электродированные части поверхности  $S$  пьезоэлектрических элементов к рассматриваемой системе могут быть присоединены электрические цепи произвольной конфигурации, включающие элементы сопротивления ( $R$ ), емкости ( $C$ ) и индуктивности ( $L$ ) (рис.1.1).

В работе рассматривается два вида колебаний: вынужденные установившиеся и собственные колебания. При вынужденных установившихся колебаниях на части внешней поверхности тела  $S_\sigma$  приложены внешние усилия, изменяющиеся по периодическому закону  $p_i = p_i e^{i\Omega t}$ , на части внешней поверхности  $S_u$  – перемещения, изменяющиеся также по периодическому закону  $u_i = u_i e^{i\Omega t}$ . Помимо этого, на части внешней поверхности  $S_q$  может быть задана поверхностная плотность зарядов  $q_s$ , которая также изменяется по периодическому закону  $q_s = q_s e^{i\Omega t}$ , а на части внешней поверхности  $S_\varphi$  – электрический потенциал  $\varphi_0$ , изменяющийся аналогичным образом  $\varphi_0 = \varphi_0 e^{i\Omega t}$ . Здесь  $p_i, u_i, q_s$  и  $\varphi_0$  – амплитудные значения вектора внешних усилий, вектора перемещений, поверхностной плотности зарядов и электрического потенциала, заданные соответственно на поверхностях  $S_\sigma, S_u, S_q$  и  $S_\varphi$ ;  $\Omega$  – циклическая частота внешних приложенных воздействий.

В задачах о вынужденных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями решение по компонентам вектора состояния  $\bar{u}(\bar{x}, t) = \{u_1(\bar{x}, t), u_2(\bar{x}, t), u_3(\bar{x}, t), \varphi(\bar{x}, t)\}$  отыскивается в виде:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{u}_0(\bar{x}) e^{i\Omega t}. \quad (1.1)$$

При собственных колебаниях решение по компонентам вектора состояния будет принимать следующий вид:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{u}_0(\bar{x}) e^{i\omega t}, \quad (1.2)$$

где  $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$  – комплексная собственная частота колебаний, действительная часть которой  $\omega_{\text{Re}}$  – соответствует круговой частоте собственных колебаний, а мнимая часть  $\omega_{\text{Im}}$  является показателем демпфирования, характеризующим скорость затухания колебаний.

## 1.2. Вариационное уравнение для пьезоэлектрического тела

Электромагнитное поле в сплошной среде описывается системой макроскопических уравнений Максвелла. Наиболее простой вид уравнения Максвелла имеют в инерциальной

системе координат, связанной с наблюдателем (лабораторная система координат). Это соответствует подходу Эйлера в механике сплошных сред.

Для решения задач статики и акустических колебаний конструкций, выполненных из пьезоматериалов, система уравнений Максвелла может быть существенно упрощена. Во-первых, пьезоматериалы, как правило, являются ненамагничивающимися диэлектриками. Во-вторых, скорости перемещения точек среды при механических колебаниях существенно ниже скорости света, что позволяет отождествить электромагнитное поле и поляризацию в лабораторной и подвижной системах координат и пренебречь магнитным полем, которое создается движущимся электрическим. Это делает возможным использовать квазистатические уравнения Максвелла [153].

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  – векторы электрической и магнитной индукции характеризуют поляризацию и намагниченность среды. Величина  $\dot{\mathbf{D}}$  называется током смещения,  $\mathbf{H}$  – вектор напряженности магнитного поля. Второе уравнение указывает на потенциальный характер электрического поля т.е.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi, \quad (1.4)$$

где  $\varphi$  – электрический потенциал.

Для описания деформационного поведения пьезоэлектрических сред используются линейные соотношения механики сплошных сред: уравнение движения и кинематическое уравнение. С учетом массовых сил уравнение движения будет следующий вид:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

Здесь  $\boldsymbol{\sigma}$  – симметричный тензор механических напряжений Коши,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений,  $\rho$  – удельная плотность материала среды. Кинематика движения точек пьезоэлектрической среды рассматривается в рамках теории малых деформаций и описывается соотношением:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right), \quad (1.6)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – симметричный тензор деформаций Коши.

Согласно второму закону термодинамики, любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит с возрастанием энтропии, что может быть выражено в форме неравенства:

$$\rho T \dot{S} - (\rho \eta - \nabla \cdot \mathbf{q}) - \mathbf{q} \cdot \nabla (\ln T) \geq 0. \quad (1.7)$$

Здесь  $T$  – абсолютная температура;  $S$  – энтропия;  $\mathbf{q}$  – вектор теплового потока;  $\eta$  – скорость производства (стока) тепла внутренними источниками. В рамках допущений линейной теории упругости, первый закон термодинамики, с учетом электрических слагаемых можно записать как

$$\rho \dot{U} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \rho \eta - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (1.8)$$

где  $U$  – внутренняя энергия. С учетом (1.8), неравенство (1.7) можно представить в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \rho (\dot{u} - T \dot{S}) - \mathbf{q} \cdot \nabla (\ln T) \geq 0. \quad (1.9)$$

В рамках линейной упругости плотность массы  $\rho$  остается неизменной величиной, и тогда скорости изменения внутренней энергии и энтропии удобно отнести не к единице массы, как в (1.9), а к единице объема, т.е. заменить  $\rho \dot{U}$ ,  $\rho \dot{S}$  на  $\dot{U}$ ,  $\dot{S}$ . В дальнейшем для удобства знак «тильда» над  $U$  и  $S$  будем опускать, имея в виду, что они отнесены к единице объема.

Согласно (1.8) и (1.9), внутренняя энергия есть функция  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $S$ :  $U = U(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, S)$  и, чтобы продвинуться дальше в теории с выходом на практические приложения, необходимо будет задать какую-то конкретную зависимость внутренней энергии от этих параметров. Поскольку энтропия – физически неизмеряемая величина, в отличие от температуры, сложно задавать в явном виде какую-либо зависимость функции внутренней энергии от энтропии, но значительно проще – от температуры. Аналогичное замечание относится и к вектору электрической индукции  $\mathbf{D}$ , который лучше заменить на непосредственно измеряемую величину – вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ .

В связи со сказанным выше, необходимо осуществить переход от аргумента  $S$  к аргументу  $T$ , а от аргумента  $\mathbf{D}$  к аргументу  $\mathbf{E}$ . Это можно реализовать с помощью преобразования Лежандра  $F = u - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - ST$  и перейти от внутренней энергии  $u$  к свободной энергии Гельмгольца  $F$ , приходящейся на единицу объема, которая будет являться функцией деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и температуры  $T$ :  $F = F(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}, T)$ . В электроупругости эта энергия называется электрической функцией

Гиббса и обозначается  $H$ :  $H = u - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - ST$ . Тогда  $\dot{u} = \dot{H} + \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \dot{S}T + S\dot{T}$  и, подставляя это выражение в (1.9), которое теперь не содержит  $\rho$  перед скобкой в третьем слагаемом, имеем

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\dot{H} + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{E}} + S\dot{T}) - \mathbf{q} \cdot \nabla(\ln T) \geq 0. \quad (1.10)$$

Учитывая, что  $H = H(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}, T)$ ,  $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial H}{\partial T} \dot{T}$ , и, подставляя это выражение в (1.10), получаем неравенство вида

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\mathbf{D} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}}\right) \cdot \dot{\mathbf{E}} - \left(S + \frac{\partial H}{\partial T}\right) \dot{T} - \mathbf{q} \cdot \nabla(\ln T) \geq 0. \quad (1.11)$$

которое носит название неравенства Клаузиуса-Дюгема. Осуществляя теперь процесс локального линейного продолжения [154-155], приходим к выводу, что неравенство (1.11) будет выполняться для любого процесса локального линейного продолжения тогда и только тогда, когда три первых выражения в скобках будут равны нулю:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_E}, \quad \mathbf{D} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}}, \quad S = -\frac{\partial H}{\partial T}. \quad (1.12)$$

Оставшееся неравенство примет вид

$$-\mathbf{q} \cdot \nabla(\ln T) \geq 0. \quad (1.13)$$

Учитывая, что  $\mathbf{q} \cdot \nabla(\ln T) = (1/T)\mathbf{q} \cdot \nabla T$  и, т.к.  $T$  – абсолютная температура,  $(1/T)$  – положительная величина, которая не влияет на неравенство и может быть опущена,  $\mathbf{q} \cdot \nabla T \leq 0$ , т.е. вектор теплового потока направлен против градиента температуры, а это значит, что тепло переходит от более нагретого места к менее нагретому, что и должно реализовываться при рассмотрении реальных процессов. В результате  $-\mathbf{q} \cdot \nabla(\ln T)$  – положительная величина, и неравенство (1.12) выполняется.

Чтобы конкретизировать равенства (1.13), необходимо конкретизировать зависимость  $H = H(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}, T)$ . В силу того, что в данной работе тепловые процессы не рассматриваются, в явном виде функция  $H$  будет зависеть только от двух переменных:  $\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}$ . Чтобы определяющие соотношения зависели только линейно от  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\mathbf{E}$ , эти переменные должны входить в  $H$  или в квадрате, или как произведение:



$$H = (1/2)\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + (1/2)\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.14)$$

Записанное в тензорном виде выражение (1.14) справедливо для любой системы координат, а не только для декартовой. Здесь  $\mathbf{C}$  – тензор четвертого ранга, симметричный по первой и второй парам индексов, а также по индексам внутри пар, определяющий упругие свойства материала,  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  – симметричный тензор второго ранга, определяющий диэлектрические свойства материала, а  $\boldsymbol{\beta}$  – тензор третьего ранга, симметричный по первым двум индексам, определяющий пьезоэлектрические свойства материала. Составляющие указанных выше тензоров – постоянные величины, коэффициенты  $(1/2)$  удобно выделить отдельно. Знак «минус» также может присутствовать в тензорах при этих величинах, но, чтобы все тензоры содержали только положительные значения, удобно представить (1.14) в следующем виде

$$H = (1/2)\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - (1/2)\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}.$$

Используя правила дифференцирования векторных функций векторного аргумента и тензорных функций тензорного аргумента по аргументу [154], получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \\ \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV}) &= \frac{1}{2} [(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^T + (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C})^T] = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь  $\mathbf{C}_{II}^{IV}$  - второй изотропный тензор четвертого ранга, который при двойном скалярном умножении как слева, так и справа на тензор второго ранга  $\mathbf{A}$  транспонирует его:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} = \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  [154], и учтена отмеченная выше симметрия тензора  $\mathbf{C}$  по парам индексов и внутри пар.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{g}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь учтена указанная выше симметрия тензора  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ .

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^T = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{g} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.18)$$

Здесь учтена указанная выше симметрия тензора  $\boldsymbol{\beta}$  по первым двум индексам. Принимая во внимание эти выражений, два первых уравнения в (1.12) представляются в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_E} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.19)$$

Выражения (1.19) – ни что иное, как физические соотношения для описания связанного электромеханического поведения тел, выполненных из пьезоэлектрических материалов.

Подведение и снятие электрической энергии с деформированного пьезоэлектрического тела осуществляется с помощью электродных покрытий, нанесенных на части его поверхности (электродированные поверхности). В дальнейшем полагаем, что электродные покрытия являются тонкими идеальными проводниками с пренебрежимо малой массой. Наличие покрытия токопроводящим слоем части поверхности пьезоэлектрического тела делает ее эквипотенциальной, т.е. на всей электродированной поверхности значение электрического потенциала одинаково.

Дифференциальная формулировка задачи электроупругости, описываемая соотношениями (1.3-1.6, 1.19), замыкается заданием краевых условий. Эти условия относительно амплитудных значений переменных формулируются в следующем виде:

$$\mathbf{u} \Big|_{S=S_u^n} = \mathbf{u}_0, \quad (1.20)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \Big|_{S=S_\sigma^n} = \mathbf{p}, \quad (1.21)$$

$$\varphi \Big|_{S=S_\varphi^n} = \varphi_0. \quad (1.22)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \Big|_{S=S_q^n} = -q_s, \quad (1.23)$$

Потенциал  $\varphi$  определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому считаем, что на определенном участке электродированной поверхности задан нулевой потенциал, тогда  $\varphi$  будет иметь смысл разности потенциалов. Вводя поверхностную плотность зарядов  $q_s$  и условие (1.23), мы пренебрегаем электрическим полем в окружающей среде, что допустимо для сильных диэлектриков. Плотность  $q_s$  как характеристика свободных зарядов может быть не равна нулю только на электродированных участках поверхности.

Неэлектродированные части поверхности пьезоэлектрического тела  $S_{p0}$  являются непроводящими поверхностями, и на них отсутствуют свободные заряды, что в рассматриваемой форме уравнений Максвелла выражается следующим уравнением [23, 153, 156-157]:

$$\int_{S_{p0}^n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) dS = 0 \text{ или } \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (1.24)$$

На электродированных частях поверхности пьезоэлектрического тела электрические граничные условия зависят от способа передачи ему электрической энергии. Конкретный вид граничных условий по электрической компоненте вектора состояния зависит от вида источников энергии. В качестве модельных источников электрической энергии могут использоваться широко применяемые в электротехнике генераторы тока и напряжения [153, 156-157].

Если подвод энергии к пьезоэлектрическому телу осуществляется с помощью генератора напряжения с выходной разностью потенциалов  $\varphi_0$ , то граничные условия по электрической компоненте будут иметь вид (1.22).

При возбуждении колебаний пьезоэлектрического тела с помощью генератора тока с заданным значением силы тока  $I_0(t)$  разность потенциалов  $\varphi(t)$  на электродах неизвестна.

В этом случае, учитывая, что  $\frac{d}{dt} \int_{S_q^n} q_e dS = I_0(t)$ , из условия (1.23), получается интегральное

условие для вектора электрической индукции:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_q^n} q_e dS = \frac{d}{dt} \int_{S_q^n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) dS = -I_0(t). \quad (1.25)$$

С учетом соотношений (1.4, 1.6, 1.19), выражение (1.25) можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) \int_{S_q^n} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) dS - (\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{n}) \int_{S_q^n} \nabla \varphi dS = - \int I_0(t) dt \quad (1.26)$$

или

$$(\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{n}) \int_{S_q^n} \nabla \varphi dS = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) \int_{S_q^n} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) dS + \int I_0(t) dt \quad (1.27)$$

откуда можно получить неизвестное значение электрического потенциала  $\varphi$  на электродированной поверхности пьезоэлектрического тела, при заданной функции изменения силы тока  $I = I_0(t)$ .

Применим метод Галеркина к однородным уравнения (1.3), (1.5), (1.21), (1.23), (1.24):

$$\int_{V_1} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dV \pm \int_{S_\sigma} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi dV \pm \int_{S_q} (q - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi dS = 0. \quad (1.28)$$

Здесь объемы и поверхности не пересекаются, и вариации  $\delta \mathbf{u}$  и  $\delta \varphi$  независимы. Поэтому записанное уравнение разваливается на четыре составляющих его уравнения, т.е. является тождеством.

Преобразуем часть второго слагаемого, имеющего вид  $-\int_{S_\sigma} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dS$ . Принимая во внимание соотношение (1.20), т.е. выбирая пробные функции  $u$  удовлетворяющими на поверхности  $S_u$  условию  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  (откуда следует, что  $\delta \mathbf{u} = 0$  на  $S_u$ ), преобразуемое уравнение можно представить в виде

$$-\int_{S_\sigma} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dS = - \int_{S=S_\sigma \cup S_u} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dS$$

и применить к последнему выражению теорему Остроградского Гаусса:

$$-\int_{S_\sigma} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dS = - \int_{S=S_\sigma \cup S_u} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dS = - \int_{V_1} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u})] dV.$$

Используя известное соотношение  $[\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{A}^T \cdot \nabla \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{A}$  – любой тензор второго ранга,  $\mathbf{b}$  – любой вектор, и полагая  $\mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{b} = \delta \mathbf{u}$ , получаем, учитывая симметрию тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ ,

$$-\int_{V_1} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u})] dV = - \int_{V_1} [(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u}] dV - \int_{V_1} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})] dV.$$

В последнем интеграле можно поменять местами операции дифференцирования по координатам и варьирования. Положение точки в текущем состоянии определяется радиус-вектором  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{r}$  – положение точки в начальной конфигурации. При вариации  $\mathbf{u}$  варьируется только  $\mathbf{R}$ ,  $\delta \mathbf{r} = 0$ . Оператор Гамильтона  $\nabla$  – оператор начального состояния, который имеет представление  $\nabla = r^i \partial / \partial q^i$ , где  $q^i$  – обобщенные лагранжевы (материальные) координаты, а  $r^i$  – векторы взаимного базиса, определяемые через  $r$ , а

значит тоже не варьируемые. Отсюда следует, что  $\nabla \delta = r^i \frac{\partial \delta}{\partial q^i} = \delta(r^i \frac{\partial}{\partial q^i}) = \delta \nabla$ , т.е. эти операторы коммутируют. В результате, подынтегральное выражение в последнем интеграле представляется как

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \delta \mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta(\nabla \mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta(\nabla \mathbf{u})^T = \boldsymbol{\sigma} \cdot [\delta(\nabla \mathbf{u}) + \delta(\nabla \mathbf{u})^T] / 2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta[(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T] / 2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Здесь учтены свойства двойного скалярного произведения тензоров второго ранга  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$  и симметрия тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ . В результате принимая у второго интеграла в (1.28) знак «минус», первые два интеграла в (1.28) переписутся в виде

$$\int_{V_1} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_\sigma} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dS = \int_{V_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (1.29)$$

Теперь преобразуем последние два слагаемых уравнения (1.28). Принимая во внимание граничное условие (1.22), т.е. выбирая пробные функции  $\varphi$  удовлетворяющими условию  $\varphi = \varphi_0$  на поверхности  $S_\varphi$ , дополняющей  $S_q$  до полной поверхности  $S$  (откуда следует, что  $\delta \varphi = 0$  на  $S_\varphi$ ), интеграл  $\int_{S_q} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi dS$  можно представить в виде

$$\int_{S_q} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi dS = \int_{S=S_q \cup S_\varphi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi dS,$$

к которому уже применима теорема Остроградского-Гаусса:

$$\int_{S_q} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi dS = \int_{S=S_q \cup S_\varphi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi dS = \int_{V_1} [\nabla \cdot (\mathbf{D} \delta \varphi)] dV.$$

Используя далее известную формулу  $[\nabla \cdot (\alpha \mathbf{b})] = \alpha(\nabla \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot \nabla \alpha$ , где  $\alpha$  и  $\mathbf{b}$  – любые скаляр и вектор, и принимая  $\alpha = \delta \varphi$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{D}$ , имеем

$$\int_{S_q} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi dS = \int_{S=S_q \cup S_\varphi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi dS = \int_{V_1} [\nabla \cdot (\mathbf{D} \delta \varphi)] dV = \int_{V_1} [(\nabla \cdot \mathbf{D}) \delta \varphi] dV + \int_{V_1} [\mathbf{D} \cdot (\nabla \delta \varphi)] dV$$

В последнем интеграле можно поменять местами операции дифференцирования по координатам и варьированию. Тогда, с учетом соотношения (1.4), последние два интеграла в выражении (1.28) запишутся следующим образом

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \delta\varphi dV \pm \int_{S_q} (q - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \delta\varphi dS = \int_{V_1} \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} dV - \int_{S_q} q \delta\varphi dS. \quad (1.30)$$

В результате всех проведенных преобразований вариационное уравнение, описывающее связанное электромеханическое состояние пьезоэлектрической среды, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{V_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E}) dV + \int_{V_1} \rho \ddot{u} \delta u dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS - \int_{S_q} q \delta\varphi dS = \\ & = \int_{V_1} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + D_i \delta E_i) dV + \int_{V_1} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS - \int_{S_q} q \delta\varphi dS = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

### 1.3. Вариационное уравнение для кусочно-однородного вязкоупругого тела

Движение однородных упругих или вязкоупругих элементов  $V_2^m$  объема  $V_2$  описывается вариационным уравнением, сформулированным на основе соотношений линейной теории упругости или вязкоупругости. Для формулировки вариационного уравнения также используется метод Галеркина. Окончательно, оно будет иметь следующий вид:

$$\sum_{m=1}^M \left( \int_{V_2^m} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_m \ddot{u}_i \delta u_i) dV - \int_{V_2^m} f_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma^m} p_i \delta u_i dS \right) = 0. \quad (1.32)$$

Для упругих составляющих  $V_2^m$  объема  $V_2$  при малых деформациях, между компонентами симметричного тензора напряжений  $\sigma$  и симметричного тензора деформаций  $\varepsilon$  выполняются физические соотношения для изотропного [158-160]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} &= 2G^{(m)} \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} \right), \\ \sigma &= B^{(m)} \theta, \end{aligned} \quad (1.33)$$

или анизотропного тела [158-160]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^m \varepsilon_{kl}. \quad (1.34)$$

Здесь  $G^{(m)}$ ,  $B^{(m)}$  – упругие сдвиговые и объемные модули,  $\sigma$  – среднее напряжение,  $\theta$  – объемная деформация,  $C_{ijkl}^m$  – компоненты тензора упругих констант анизотропного тела.

Для вязкоупругих частей выполняются соотношения линейной вязкоупругости:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2G_0^{(m)} \left( e_{ij} - \int_0^t R^{(m)}(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right), \\ \sigma &= B_0^{(m)} \left( \theta - \int_0^t K^{(m)}(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Здесь  $G_0^{(m)}, B_0^{(m)}$  – мгновенные сдвиговые и объемные модули,  $s_{ij}, e_{ij}$  – компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций,  $R^{(m)}, K^{(m)}$  – ядра релаксации.

При вынужденных установившихся колебаниях нижний предел интегрирования в соотношениях (1.35) заменяется на  $-\infty$  [161], и уравнения, определяющие связь между  $s_{ij}$  и  $e_{ij}$ , записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} s_{ij}^0(x_i) e^{i\Omega t} &= 2G_0^{(m)} \left( e_{ij}^0(x_i) e^{i\Omega t} - \int_{-\infty}^t R^{(m)}(t-\tau) e_{ij}^0(x_i) e^{i\Omega \tau} d\tau \right), \\ \sigma^0(x_i) e^{i\Omega t} &= B_0^{(m)} \left( \theta^0(x_i) e^{i\Omega t} - \int_{-\infty}^t K^{(m)}(t-\tau) \theta^0(x_i) e^{i\Omega \tau} d\tau \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

После замены переменной  $s = t - \tau$  ( $\tau = t - s$ ,  $d\tau = ds$ ) и подстановки в (1.36) выражения примут вид:

$$\begin{aligned} s_{ij}^0(x_i) e^{i\Omega t} &= 2G_0^{(m)} \left( e_{ij}^0(x_i) e^{i\Omega t} - \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) e_{ij}^0(x_i) e^{i\Omega(t-s)} ds \right), \\ \sigma^0(x_i) e^{i\Omega t} &= B_0^{(m)} \left( \theta^0(x_i) e^{i\Omega t} - \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) \theta^0(x_i) e^{i\Omega(t-s)} ds \right). \end{aligned} \quad (1.37)$$

После несложных преобразований и сокращения на  $e^{i\Omega t}$ , получаем соотношения:

$$\begin{aligned} s_{ij}^0(x_i) &= 2G_0^{(m)} e_{ij}^0(x_i) \left( 1 - \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) \cos(\Omega s) ds + i \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) \sin(\Omega s) ds \right), \\ \sigma^0(x_i) &= B_0^{(m)} \theta^0(x_i) \left( 1 - \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) \cos(\Omega s) ds + i \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) \sin(\Omega s) ds \right). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
G_{\text{Re}}^{(m)} &= G_0^{(m)} \left( 1 - \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) \cos(\Omega s) ds \right), G_{\text{Im}}^{(m)} = G_0^{(m)} \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) \sin(\Omega s) ds, \\
B_{\text{Re}}^{(m)} &= B_0^{(m)} \left( 1 - \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) \cos(\Omega s) ds \right), B_{\text{Im}}^{(m)} = B_0^{(m)} \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) \sin(\Omega s) ds,
\end{aligned} \tag{1.39}$$

которые определяют действительную и мнимую части комплексного динамического модуля. Тогда определяющие соотношения (1.33) для вынужденных установившихся колебаний примут вид:

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{ij} &= 2\tilde{G}^{(m)} e_{ij}, \\
\bar{\sigma} &= \tilde{B}^{(m)} \theta.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Здесь  $\tilde{G}^{(m)} = G_{\text{Re}}^{(m)} + iG_{\text{Im}}^{(m)}$ ,  $\tilde{B}^{(m)} = B_{\text{Re}}^{(m)} + iB_{\text{Im}}^{(m)}$

В задаче о собственных колебаниях уравнения связи  $s_{ij}$  и  $e_{ij}$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
s_{ij}^0(x_i) e^{i\omega t} &= 2G_0^{(m)} \left( e_{ij}^0(x_i) e^{i\omega t} - \int_0^t R^{(m)}(t-\tau) e_{ij}^0(x_i) e^{i\omega\tau} d\tau \right), \\
\sigma^0(x_i) e^{i\omega t} &= B_0^{(m)} \left( \theta^0(x_i) e^{i\omega t} - \int_0^t K^{(m)}(t-\tau) \theta^0(x_i) e^{i\omega\tau} d\tau \right),
\end{aligned} \tag{1.41}$$

или с учетом соотношений, описанных в разделе 1.1

$$\begin{aligned}
s_{ij}^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-\omega_{\text{Im}} t} &= 2G_0^{(m)} \left( e_{ij}^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-\omega_{\text{Im}} t} - \int_0^t R^{(m)}(t-\tau) e_{ij}^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} \tau} e^{-\omega_{\text{Im}} \tau} d\tau \right), \\
\sigma^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-\omega_{\text{Im}} t} &= B_0^{(m)} \left( \theta^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-\omega_{\text{Im}} t} - \int_0^t K^{(m)}(t-\tau) \theta^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} \tau} e^{-\omega_{\text{Im}} \tau} d\tau \right).
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Для дальнейших преобразований вводятся два допущения [161]:

- колебания происходят с медленно меняющимися амплитудами;
- начальные возмущения не влияют на поведение системы.

Первое допущение позволяет вынести из-под знака интеграла  $e^{-\omega_{\text{Im}} t}$ . Второе допущение позволяет изменить нижний предел интегрирования на  $-\infty$ . В результате получаем:



$$\begin{aligned}
s_{ij}^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-\omega_{\text{Im}} t} &= 2G_0^{(m)} e_{ij}^0(x_i) \left( e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-\omega_{\text{Im}} t} - \int_0^t R^{(m)}(t-\tau) e^{i\omega_{\text{Re}} \tau} e^{-\omega_{\text{Im}} \tau} d\tau \right) \approx \\
&\approx 2G_0^{(m)} e_{ij}^0(x_i) e^{-\omega_{\text{Im}} t} \left( e^{i\omega_{\text{Re}} t} - \int_{-\infty}^t R^{(m)}(t-\tau) e^{i\omega_{\text{Re}} \tau} d\tau \right), \\
\sigma^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-\omega_{\text{Im}} t} &= B_0^{(m)} \theta^0(x_i) \left( e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-\omega_{\text{Im}} t} - \int_0^t K^{(m)}(t-\tau) e^{i\omega_{\text{Re}} \tau} e^{-\omega_{\text{Im}} \tau} d\tau \right) \approx \\
&\approx B_0^{(m)} \theta^0(x_i) e^{-\omega_{\text{Im}} t} \left( e^{i\omega_{\text{Re}} t} - \int_{-\infty}^t K^{(m)}(t-\tau) e^{i\omega_{\text{Re}} \tau} d\tau \right).
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Далее производится замена переменной  $s = t - \tau$  ( $\tau = t - s$ ,  $d\tau = ds$ ). С учетом этой замены и после сокращения на  $e^{-\omega_{\text{Im}} t}$ , соотношения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
s_{ij}^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} t} &\approx 2G_0^{(m)} e_{ij}^0(x_i) \left( e^{i\omega_{\text{Re}} t} - \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-i\omega_{\text{Re}} s} ds \right), \\
\sigma^0(x_i) e^{i\omega_{\text{Re}} t} &\approx B_0^{(m)} \theta^0(x_i) \left( e^{i\omega_{\text{Re}} t} - \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-i\omega_{\text{Re}} s} ds \right).
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Таким образом, после несложных математических преобразований получаем итоговые выражения связи между компонентами тензоров напряжений и деформаций для задачи о собственных колебаниях, аналогичные (1.33):

$$\begin{aligned}
s_{ij}^0(x_i) &\approx 2G_0^{(m)} e_{ij}^0(x_i) \left( 1 + \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) \cos(\omega_{\text{Re}} s) ds - i \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) \sin(\omega_{\text{Re}} s) ds \right), \\
\sigma^0(x_i) &\approx B_0^{(m)} \theta^0(x_i) \left( 1 + \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) \cos(\omega_{\text{Re}} s) ds - i \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) \sin(\omega_{\text{Re}} s) ds \right).
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Вводя обозначения:

$$\begin{aligned}
G_{\text{Re}}^{(m)} &= G_0^{(m)} \left( 1 - \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) \cos(\omega_{\text{Re}} s) ds \right), G_{\text{Im}}^{(m)} = G_0^{(m)} \int_{-\infty}^t R^{(m)}(s) \sin(\omega_{\text{Re}} s) ds, \\
B_{\text{Re}}^{(m)} &= B_0^{(m)} \left( 1 - \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) \cos(\omega_{\text{Re}} s) ds \right), B_{\text{Im}}^{(m)} = B_0^{(m)} \int_{-\infty}^t K^{(m)}(s) \sin(\omega_{\text{Re}} s) ds,
\end{aligned} \tag{1.46}$$

которые определяют действительную и мнимую части комплексного динамического модуля, определяющие соотношения (1.28) для задачи о собственных колебаниях примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ij} &\approx 2\tilde{G}^{(m)} e_{ij} \\ \bar{\sigma} &\approx \tilde{B}^{(m)} \theta \end{aligned} \quad (1.47)$$

где  $\tilde{G}^{(m)} = G_{\text{Re}}^{(m)} + iG_{\text{Im}}^{(m)}$ ,  $\tilde{B}^{(m)} = B_{\text{Re}}^{(m)} + iB_{\text{Im}}^{(m)}$

Таким образом, задача о колебаниях вязкоупругих тел приводится к эквивалентной задаче теории упругости с комплексными величинами перемещений, деформаций, напряжений и комплексными модулями.

#### 1.4. Вариационное уравнение для внешней электрической цепи

Через электродированные поверхности к рассматриваемой системе могут быть присоединены электрические цепи, включающие элементы сопротивления ( $R$ ), емкости ( $C$ ) и индуктивности ( $L$ ) (рис.1.2). Если к этим цепям не подведены внешние источники энергии, то они будут являться внутренними элементами системы. Внутреннюю работу электрического поля с разностью потенциалов  $V = \pm\varphi$  по перемещению любого возможного заряда на элементах электрической цепи можно представить в виде суммы работ на каждом из элементов

$$\sum A_{\text{Cir}} = A_L + A_R + A_C. \quad (1.48)$$

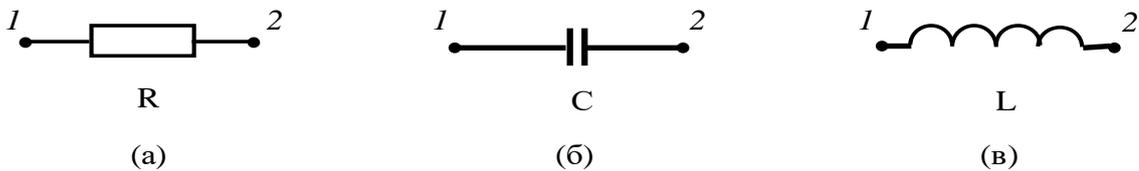


Рисунок 1.2. – Элементы внешней электрической цепи: (а) - сопротивление (резистивный элемент), (б) - конденсатор (емкостной элемент), (в) – катушка индуктивности (индуктивный элемент).

В данном случае внешняя цепь будет представлять собой систему с сосредоточенными параметрами, для которой обобщенными координатами будут являться электрические заряды  $q$  на соответствующих элементах. На основании известных подходов для динамики дискретных механических систем типа масса-пружина-демпфер можно получить вариационные уравнения для элементов внешней цепи [162].

Рассмотрим функцию Лагранжа  $\mathcal{L} = T - W$ , где  $T$  – кинетическая энергия,  $W$  – потенциальная энергия. В электрических цепях аналогом кинетической энергии является энергия магнитного поля катушки индуктивностью  $L$  (1.49), а аналогом потенциальной энергии – энергия электрического поля конденсатора емкостью  $C$  (1.50). С учетом введенных соотношений, функция Лагранжа примет вид (1.51).

$$T = \frac{L\dot{q}_L^2}{2}, \quad (1.49)$$

$$W = \frac{q_C^2}{2C}, \quad (1.50)$$

$$\mathcal{L} = T - W = \frac{L\dot{q}_L^2}{2} - \frac{q_C^2}{2C}. \quad (1.51)$$

В общем случае уравнение Лагранжа для системы, состоящей из резистора, конденсатора и катушки индуктивности будет иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{dF}{dq_i} = 0, \quad i = L, C, R, \quad (1.52)$$

где  $q_i$  – обобщенные координаты, которые, в данном случае, обозначают заряды на соответствующих элементах цепи,  $F$  – функция диссипации резистивного элемента, имеющая вид (1.53) и представляющая собой тепло, выделяемое на резисторе при протекании через него электрического тока.

$$F = \frac{R\dot{q}_R^2}{2}. \quad (1.53)$$

Рассмотрим далее вывод вариационных уравнений для цепей, состоящих только из одного из представленных на рис.1.3 элементов на основе принципа виртуальных работ. В данном случае принцип виртуальных работ формулируется следующим образом: сумма всех виртуальных работ электрического поля с разностью потенциалов  $V$  по перемещению любого возможного заряда должна быть равна нулю:

$$\delta A = q\delta\varphi = 0. \quad (1.54)$$

#### 1.4.1. Резистивная цепь

Рассмотрим цепь, состоящую только из резистивного элемента (рис.1.2.а). В этом случае функция Лагранжа  $\mathcal{L}$  будет тождественно равна нулю, а в уравнении (1.53)

останется только член с диссипативной функцией  $F$ , зависящий от  $q_R$ . Далее, применяя принцип виртуальных работ, получаем вариационное уравнение Лагранжа для резистивной цепи:

$$\frac{dF}{dq_R} \delta q = R \dot{q}_R \cdot \delta q = 0. \quad (1.55)$$

В задачах электровязкоупругости в качестве электрической независимой переменной выступает электрический потенциал. Это значит, что работу совершает заряд на вариации электрического потенциала. Таким образом, для дальнейшего использования уравнения (1.55) его необходимо преобразовать в уравнение относительно электрического потенциала. Для этого воспользуемся известными соотношениями из электротехники [163-164]:

$$V_R = RI_R, \quad I_R = \frac{dq_R}{dt}, \quad V_R = \varphi_1^R - \varphi_2^R, \quad (1.56)$$

где  $\varphi_1^R$ ,  $\varphi_2^R$  – электрические потенциалы в точках 1 и 2 (см. рис.1.2.а). Отсюда

$$\varphi_1^R - \varphi_2^R = R \cdot \frac{dq_R}{dt}, \quad \frac{dq_R}{dt} = \frac{\varphi_1^R - \varphi_2^R}{R}, \quad q = \frac{1}{R} \int (\varphi_1^R - \varphi_2^R) dt. \quad (1.57)$$

В результате вариационное уравнение для резистивной цепи будет иметь вид:

$$\frac{1}{R} \int (\varphi_1^R - \varphi_2^R) \delta \varphi dt = 0 \quad (1.58)$$

#### 1.4.2. Емкостная цепь

Рассмотрим цепь, состоящую только из ёмкостного элемента (рис.1.2.б). В этом случае функция Лагранжа  $\mathcal{L}$  будет содержать только потенциальную энергию  $W$ , функция диссипации  $F$  будет тождественно равна нулю, и, следовательно, в уравнении (1.52) останется только член, зависящий от  $q_C$ . Далее, применяя принцип виртуальных работ, получаем вариационное уравнение Лагранжа для резистивной цепи:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dq_C} \delta q = \frac{q_C}{C} \cdot \delta q = 0. \quad (1.59)$$

По аналогии с резистивной цепью перейдем от вариации заряда к вариации электрического потенциала через известные соотношения электротехники [163-164]:

$$V_C = \frac{q_C}{C}, \quad q_C = CV_C, \quad V_C = \varphi_1^C - \varphi_2^C, \quad (1.60)$$

где  $\varphi_1^C, \varphi_2^C$  – электрические потенциалы в точках 1 и 2 (см. рис.1.2.б). Отсюда

$$\varphi_1^C - \varphi_2^C = \frac{q_C}{C}, \quad q_C = C \cdot (\varphi_1^C - \varphi_2^C). \quad (1.61)$$

В результате вариационное уравнение для ёмкостной цепи будет иметь вид:

$$C(\varphi_1^C - \varphi_2^C)\delta\varphi = 0. \quad (1.62)$$

### 1.4.3. Индуктивная цепь

Рассмотрим цепь, состоящую только из индуктивного элемента (рис.1.2.в). В этом случае функция Лагранжа  $\mathcal{L}$  будет содержать только кинетическую энергию  $T$ , функция диссипации  $F$  будет тождественно равна нулю, и, следовательно, в уравнении (1.52) останется только член, зависящий от  $q_L$ . Далее, применяя принцип виртуальных работ, получаем вариационное уравнение Лагранжа для цепи, состоящей только из катушки индуктивности:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathcal{L}}{dq_L} \right) \delta q = L\ddot{q}_L \cdot \delta q = 0. \quad (1.63)$$

Перейдем от вариации заряда к вариации электрического потенциала через известные соотношения из электротехники [163-164]:

$$V_L = L \frac{dI_L}{dt}, \quad I_L = \frac{dq_L}{dt}, \quad V_L = \varphi_1^L - \varphi_2^L, \quad (1.64)$$

где  $\varphi_1^L, \varphi_2^L$  – электрические потенциалы в точках 1 и 2 (см. рис.1.2.в). Отсюда

$$\varphi_1^L - \varphi_2^L = L \frac{d^2 q_L}{dt^2}, \quad \frac{d^2 q_L}{dt^2} = \frac{\varphi_1^L - \varphi_2^L}{L}, \quad q_L = \frac{1}{L} \iint (\varphi_1^L - \varphi_2^L) dt dt. \quad (1.65)$$

В результате вариационное уравнение для индуктивной цепи будет иметь вид:

$$\frac{1}{L} \iint (\varphi_1^L - \varphi_2^L) \delta\varphi dt dt = 0. \quad (1.66)$$

## 1.5. Вариационное уравнение для задачи о колебаниях кусочно-однородного электровязкоупругого тела с внешними электрическими элементами

С учетом вида вариационных уравнений для электроупругих составляющих  $V_1^k$  объема  $V_1$  (1.31), упругой и вязкоупругой составляющих  $V_2^l$  объема  $V_2$  (1.32), а также вариационных уравнений для внешней электрической цепи (1.58, 1.62, 1.66), итоговое вариационное уравнение движения кусочно-однородного электровязкоупругого тела с внешней пассивной электрической цепью произвольной конфигурации записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left( \int_{V_1^n} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_n \ddot{u}_i \delta u_i) dV - \int_{V_1^n} f_i \delta u_i dV \right) + \\ & + \sum_{m=1}^M \left( \int_{V_2^m} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_m \ddot{u}_i \delta u_i) dV - \int_{V_2^m} f_i \delta u_i dV \right) - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS - \int_{S_p} q_e \delta \varphi dS + \\ & + \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{L_p} \iint (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) \delta \varphi dt + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{R_q} \int (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi dt + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi = 0. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Здесь  $n_L$ ,  $n_R$ ,  $n_C$  – количество индуктивных, резистивных и емкостных элементов соответственно.

С учетом вида решения (1.1) вариационное уравнение для задачи о вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями примет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left( \int_{V_1^n} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_n \Omega^2 u_i \delta u_i) dV - \int_{V_1^n} f_i \delta u_i dV \right) + \sum_{m=1}^M \left( \int_{V_2^m} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_m \Omega^2 u_i \delta u_i) dV - \int_{V_2^m} f_i \delta u_i dV \right) - \\ & - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\Omega^2 L_p} \delta \varphi (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i \Omega R_q} (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi = \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS + \int_{S_p} q_e \delta \varphi dS. \end{aligned} \quad (1.68)$$

С учетом вида решения (1.2) вариационное уравнение для задачи о собственных колебаниях электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями при отсутствии внешних нагрузок примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left( \int_{V_1^n} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_n \omega^2 u_i \delta u_i) dV \right) + \sum_{m=1}^M \left( \int_{V_2^m} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_m \omega^2 u_i \delta u_i) dV \right) - \\ & - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\omega^2 L_p} \delta \varphi (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i \omega R_q} (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi = 0. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Полученные итоговые уравнения (1.68) и (1.69) решаются численно методом конечных элементов (МКЭ).

## Глава 2. Численная реализация задачи о колебаниях электровязкоупругих тел с элементами электрических цепей

### 2.1. Конечно-элементные соотношения для кусочно-однородного электровязкоупругого тела с элементами электрических цепей

Для вывода соотношений при численной реализации задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями методом конечных элементов, необходимо переписать уравнения (1.68) и (1.69) в матричной форме. Для этого вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \{u^{V_1^n}\} &= \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^T, \\
 \{\varepsilon_1\} &= \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, E_1, E_2, E_3\}^T, \\
 \{\sigma_1\} &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, D_1, D_2, D_3\}^T, \\
 \{\rho_n^{V_1}\} &= \{\rho_n^{V_1}, \rho_n^{V_1}, \rho_n^{V_1}, 0\}^T; \\
 \{f_n^{V_1}\} &= \{f_1^{V_1^n}, f_3^{V_1^n}, f_3^{V_1^n}, 0\}, \\
 \{p_n^{V_1}\} &= \{p_1^{V_1^n}, p_3^{V_1^n}, p_3^{V_1^n}, q_1^{V_1^n}\},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 \{u^{V_2^m}\} &= \{u_1, u_2, u_3\}^T, \\
 \{\varepsilon_2\} &= \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T, \\
 \{\sigma_2\} &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T, \\
 \{\rho_m^{V_2}\} &= \{\rho_m^{V_2}, \rho_m^{V_2}, \rho_m^{V_2}\}^T, \\
 \{f_m^{V_2}\} &= \{f_1^{V_2^m}, f_3^{V_2^m}, f_3^{V_2^m}\}, \\
 \{p_m^{V_2}\} &= \{p_1^{V_2^m}, p_3^{V_2^m}, p_3^{V_2^m}\},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

С учетом введенных обозначений (2.1), физические соотношения для электродупругих частей объема  $V_1$ , описываемые уравнениями (1.19), могут быть представлены в матричной форме:

$$\{\sigma_1\} = [D_1^n] \{\varepsilon_1\} = \begin{bmatrix} [C_n] & [\beta_n] \\ [\beta_n]^T & [\varepsilon_n] \end{bmatrix} \{\varepsilon_1\}, \tag{2.3}$$

где

$$[C_n] = \begin{bmatrix} C_{11}^n & C_{12}^n & C_{13}^n & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^n & C_{22}^n & C_{13}^n & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^n & C_{13}^n & C_{11}^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11}^n - C_{12}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^n \end{bmatrix}; \quad [\beta_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{31}^n \\ 0 & 0 & \beta_{31}^n \\ 0 & 0 & \beta_{33}^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{15}^n & 0 \\ \beta_{15}^n & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon_n] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^n & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^n \end{bmatrix}$$

Аналогичным образом, на основе введенных обозначений (2.2) можно представить в матричном виде физические соотношения (1.33-1.34) для упругих частей объема  $V_2$ :

$$\{\sigma_2\} = [D_2^m] \{\varepsilon_2\}. \quad (2.4)$$

В случае изотропного материала (1.33) матрица  $[D_2^m]$  будет иметь вид (2.5):

$$[D_2^m] = 2G^{(m)} [A_1] + B^{(m)} [A_2], \quad (2.5)$$

где

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$G^{(m)}$  и  $B^{(m)}$  – упругие сдвиговые и объемные модули.

Если материал упругих компонент объема  $V_2$  обладает анизотропией упругих свойств, матрица  $[D_2^m]$  может иметь различный вид в зависимости от класса анизотропии.

Однако в наиболее общем случае ее можно представить как

$$[D_2^m] = \begin{bmatrix} C_{11}^m & C_{12}^m & C_{13}^m & C_{14}^m & C_{15}^m & C_{16}^m \\ & C_{22}^m & C_{23}^m & C_{24}^m & C_{25}^m & C_{26}^m \\ & & C_{33}^m & C_{34}^m & C_{35}^m & C_{36}^m \\ & & & C_{44}^m & C_{45}^m & C_{46}^m \\ & & & & C_{55}^m & C_{56}^m \\ & & & & & C_{66}^m \end{bmatrix}$$



Для вязкоупругих частей, описываемых соотношениями (1.40, 1.47), упругие сдвиговые и объемные модули  $G^{(m)}$  и  $B^{(m)}$  в (2.5) заменяются на соответствующие комплексные аналоги  $\tilde{G}^{(m)}$  и  $\tilde{B}^{(m)}$ .

Внешние электрические цепи, независимо от их архитектуры, определяются количеством узловых точек, которые характеризуются значением электрического потенциала  $\varphi_i$  ( $i=1,2,3,\dots,p$ ), и количеством групп  $\Gamma$  из электрических элементов, соединяющих две узловые точки со значениями потенциала  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  ( $i \neq j$ ). Отдельная группа может включать набор из элементов, представленных на рис.2.1.

Группа, включающая в себя сопротивление, емкость и индуктивность может рассматриваться как обобщенный электрический элемент внешней электрической цепи, приведенный на рис 2.1.д.

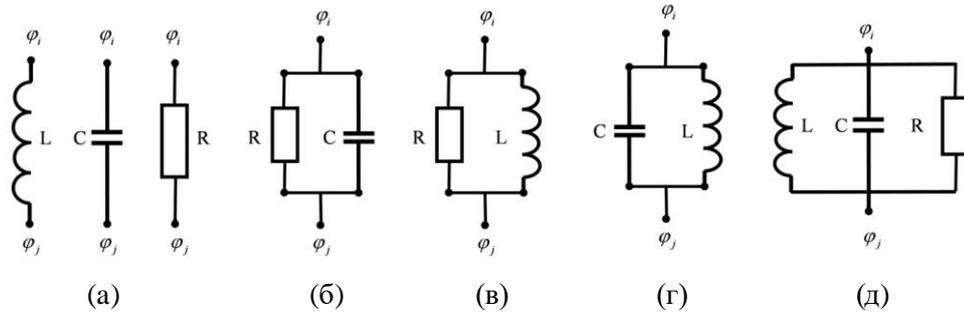


Рисунок 2.1. – Варианты групп  $\Gamma$  из элементов электрических цепей: сопротивлений, емкостей, индуктивностей.

С учетом соотношений (1.58, 1.62, 1.66) и вида решения (1.2) матричные соотношения для каждого из элементов на рис. 2.1.а будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A_L &= \{\varphi^i, \varphi^j\}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega^2 L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2 L} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\omega^2 L} \cdot \{\varphi^i, \varphi^j\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
 A_R &= \{\varphi^i, \varphi^j\}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{i\omega R_g} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{i\omega R_g} \end{bmatrix} = \frac{1}{i\omega R_g} \cdot \{\varphi^i, \varphi^j\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
 A_C &= \{\varphi^i, \varphi^j\}^T \begin{bmatrix} C_g & 0 \\ 0 & -C_g \end{bmatrix} = C_g \cdot \{\varphi^i, \varphi^j\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Введем следующие обозначения:

$$[k_L] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega^2 L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2 L} \end{bmatrix}, \quad [k_R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{i\omega R_g} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{i\omega R_g} \end{bmatrix}, \quad [k_C] = \begin{bmatrix} C_g & 0 \\ 0 & -C_g \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Тогда, с учетом (1.48) матричное соотношение для обобщенного элемента, представленного на рис.2.1.д будет иметь вид:

$$A_{cir} = \{\varphi_i, \varphi_j\}^T [k_{cir}] = \{\varphi_i, \varphi_j\}^T ([k_L] + [k_R] + [k_C]). \quad (2.8)$$

Принимая во внимание соотношения (2.8), а также (2.3-2.5), рассматриваемая задача для электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями, определяемая вариационными уравнениями (1.68) и (1.69), может быть описана матричными уравнениями:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left[ \int_{V_1^n} \left( \delta \{\varepsilon_1\}^T [D_1^n] \{\varepsilon_1\} - \omega^2 \delta \{u^{V_1^n}\}^T [\rho_n^{V_1}] \{u^{V_1^n}\} \right) dV - \int_{V_1^n} \delta \{u^{V_1^n}\}^T \{f_i\} dV \right] + \\ & + \sum_{m=1}^M \left[ \int_{V_2^m} \left( \delta \{\varepsilon_2\}^T [D_2^m] \{\varepsilon_2\} - \omega^2 \delta \{u^{V_2^m}\}^T [\rho_m^{V_2}] \{u^{V_2^m}\} \right) dV - \int_{V_2^m} \delta \{u^{V_2^m}\}^T \{f_m^{V_2}\} dV \right] \quad (2.9) \\ & + \sum_{g=1}^{\Gamma} \delta \{\varphi_g\}^T [k_g^{cir}] \{\varphi_g\} = \int_{S_{\sigma}^{V_1}} \delta \{u^{V_1}\}^T \{p_n^{V_1}\} dS + \int_{S_{\sigma}^{V_2}} \delta \{u^{V_2}\}^T \{p_m^{V_2}\} dS. \\ & \sum_{k=1}^N \int_{V_1^k} \left( \delta \{\varepsilon_1\}^T [D_1^k] \{\varepsilon_1\} - \omega^2 \delta \{u^{V_1^k}\}^T [\rho_k^{V_1}] \{u^{V_1^k}\} \right) dV + \\ & + \sum_{l=1}^M \int_{V_2^l} \left( \delta \{\varepsilon_2\}^T [D_2^l] \{\varepsilon_2\} - \omega^2 \delta \{u^{V_2^l}\}^T [\rho_l^{V_2}] \{u^{V_2^l}\} \right) dV + \sum_{g=1}^{\Gamma} \delta \{\varphi_g\}^T [k_g^{cir}] \{\varphi_g\} = 0. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Для моделирования поведения электроупругих частей объема  $V_1$  будут использоваться 20-ти узловые объемные конечные элементы с квадратичной аппроксимацией узловых неизвестных в виде тетраэдров. Вид данных элементов в локальной системе координат  $(\xi, \eta, \theta)$  представлен на рис. 2.2. Локальные координаты внутри конечного элемента изменяются в следующих пределах:  $-1 \leq \xi \leq 1$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$ ,  $-1 \leq \theta \leq 1$ .

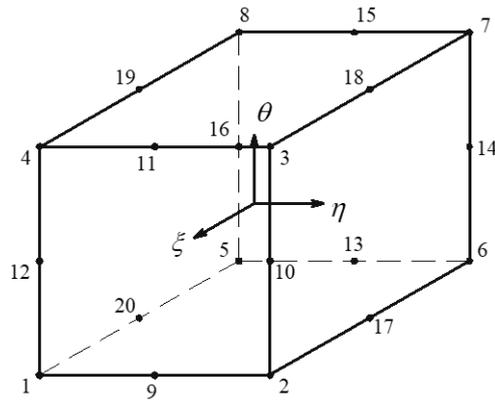


Рисунок 2.2. – Вид конечного элемента для электроупругих частей объема  $V_1$  в локальной системе координат  $(\xi, \eta, \theta)$ .

В каждом узле данного элемента присутствуют 4 узловых неизвестных: 3 перемещения  $u_i, v_i, w_i$  и электрический потенциал  $\varphi_i$ . Связь между искомыми переменными и узловыми неизвестными в конечном элементе может быть выражена следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix} = [N^{V_1}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \dots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \\ \varphi_{20} \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

где  $[N^{V_1}]$  – матрица функций формы:

$$[N^{V_1}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Функции формы для данного типа элемента в локальной системе координат  $(\xi, \eta, \theta)$  принимают вид:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\theta)(\xi-\eta-\theta-2); & N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\theta)(\xi+\eta-\theta-2); \\
N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\theta)(\xi+\eta+\theta-2); & N_4 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\theta)(\xi-\eta+\theta-2); \\
N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\theta)(-\xi-\eta-\theta-2); & N_6 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\theta)(-\xi+\eta-\theta-2); \\
N_7 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\theta)(-\xi+\eta+\theta-2); & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\theta)(-\xi-\eta+\theta-2); \\
N_9 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\theta); & N_{10} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\theta^2); & N_{11} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\theta); \\
N_{12} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\theta^2); & N_{13} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\theta); & N_{14} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1-\theta^2); \\
N_{15} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\theta); & N_{16} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\theta^2); & N_{17} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\theta); \\
N_{18} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\theta); & N_{19} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\theta); & N_{20} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\theta).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

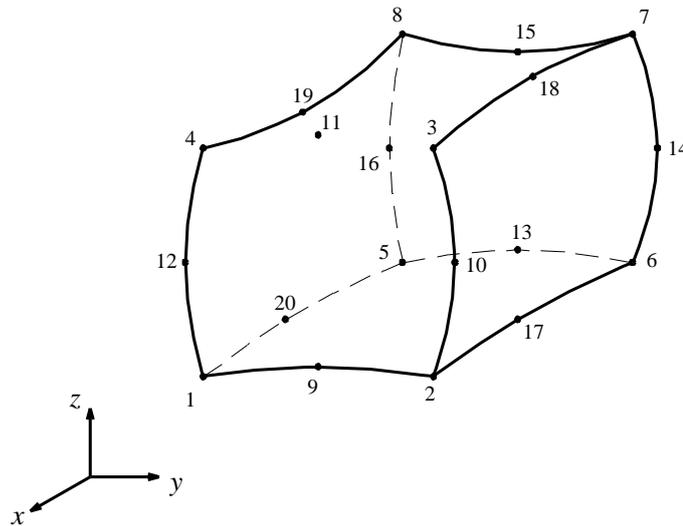


Рисунок 2.3. – Вид конечного элемента в глобальной системе координат  $(x, y, z)$ .

На рис.2.3 представлен вид конечного элемента для электроупругих частей в глобальной системе координат  $(x, y, z)$ . Преобразование координат вводится через функции формы конечного элемента (2.13) следующим образом:

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{N^{nod}} x_i N_i, \\
y &= \sum_{i=1}^{N^{nod}} y_i N_i, \\
z &= \sum_{i=1}^{N^{nod}} z_i N_i.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Для формирования матрицы жесткости используются стандартные процедуры метода конечных элементов (МКЭ) [165]:

$$\left[ k_{el}^{V_1} \right] = \int_{V_{el}} \left[ B^{V_1} \right]^T \left[ D_1^n \right] \left[ B^{V_1} \right] dV, \tag{2.15}$$

где матрица градиентов  $\left[ B^{V_1} \right]$  имеет вид:

$$\left[ B^{V_1} \right] = \begin{bmatrix}
\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & 0 \\
\frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 \\
0 & \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z}
\end{bmatrix}$$

С учетом введенного преобразования координат (2.14), компоненты матрицы градиентов будут определяться следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \end{Bmatrix}, \quad i = \overline{1, 20}. \tag{2.16}$$

Матрица Якоби преобразования координат записывается как:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

где  $x, y, z$  – функции преобразования координат (2.14).

Для вычисления объемного интеграла в (2.14) необходимо осуществить замену переменной интегрирования:

$$dV = dxdydz = |\det[J]| d\xi d\eta d\theta. \quad (2.18)$$

В результате выражение для матрицы жесткости конечного элемента примет вид:

$$[k_{el}^{V_1}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^{V_1}]^T [D_1^k] [B^{V_1}] |\det[J]| d\xi d\eta d\theta. \quad (2.19)$$

Матрица масс для данного конечного элемента, учитывая (2.18), определяется следующим образом:

$$[m_{el}^{V_1}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^{V_1}]^T \{\rho_n^{V_1}\} [N^{V_1}] |\det[J]| d\xi d\eta d\theta. \quad (2.20)$$

Выражения для векторов объемных и поверхностных нагрузок записываются как

$$\begin{aligned} \{f_{el}^{V_1}\} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{f_n^{V_1}\} |\det[J]| d\xi d\eta d\theta; \\ \{p_{el}^{V_1}\} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{p_n^{V_1}\} |\det[J]| d\xi d\eta d\theta. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для моделирования поведения упругих или вязкоупругих частей объема  $V_2$  будут использоваться 20-ти узловые конечные элементы с квадратичной аппроксимацией узловых неизвестных. Вид данных элементов аналогичен виду элементов для электроупругих частей объема  $V_1$ .

В каждом узле данного элемента присутствуют 3 узловых неизвестных – 3 перемещения  $u_i, v_i, w_i$ . Связь между искомыми переменными и узловыми неизвестными в конечном элементе может быть выражена следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N^{V_2}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \dots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{Bmatrix}, \quad (2.21)$$

где  $[N^{V_2}]$  – матрица функций формы, имеющая вид:

$$[N^{V_2}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Функции формы для данного типа элемента аналогичны функциям формы конечных элементов, описывающих электроупругие части объема  $V_1$  (2.13). Преобразование координат вводится согласно (2.14)

Матрица жесткости для рассматриваемого конечного элемента формируется также, как матрица жесткости конечного элемента для электроупругих частей:

$$[k_{el}^{V_2}] = \int_{V_{el}} [B^{V_2}]^T [D_2^m] [B^{V_2}] dV, \quad (2.23)$$

где матрица градиентов  $[B^{V_2}]$  имеет следующий вид:

$$[B^{V_2}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial N_{20}}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

В результате, учитывая (2.16-2.18), матрица жесткости для конечного элемента, описывающего упругие и вязкоупругие части, будет вычисляться согласно соотношению:

$$[k_{el}^{V_2}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^{V_2}]^T [D_2^m] [B^{V_2}] |\det[J]| d\xi d\eta d\theta. \quad (2.25)$$

Матрица масс, учитывая (2.18), имеет вид:

$$[m_{el}^{V_2}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^{V_2}]^T \{\rho_m^{V_2}\} [N^{V_2}] |\det[J]| d\xi d\eta d\theta. \quad (2.26)$$

Векторы объемных и поверхностных нагрузок:

$$\begin{aligned} \{f_{el}^{V_2}\} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^{V_2}]^T \{f_m^{V_2}\} |\det[J]| d\xi d\eta d\theta; \\ \{p_{el}^{V_2}\} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^{V_2}]^T \{p_m^{V_2}\} |\det[J]| d\xi d\eta d\theta. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Элементы внешней электрической цепи, такие как резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы, являются элементами с сосредоточенными параметрами. Поэтому для моделирования данных элементов используются специальные двухузловые конечные элементы, общий вид которых представлен на рис. 2.1.д. Конечно-элементные соотношения для данного обобщенного конечного элемента строятся на основе второго закона Кирхгофа. В общем случае, для данного типа конечного элемента должно выполняться условие баланса электрического заряда в каждом узле:

$$[K]\{V\} = \{Q\}, \quad (2.28)$$

где  $\{V\} = \{V_i, V_j\}^T$  – вектор узловых значений электрического потенциала,  $\{Q\} = \{Q_i, Q_j\}^T$  – вектор узловых зарядов.

Для задачи о собственных или задачи о вынужденных установившихся колебаниях матрица  $[K]$  для рассматриваемого обобщенного конечного элемента внешней электрической цепи будет иметь вид:

$$[k_{el}^{cir}] = \left( -\frac{1}{\omega^2 L} + \frac{1}{i\omega R} + C \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Здесь  $R, L, C$  – значения сопротивления, индуктивности и емкости соответствующих компонент обобщенного элемента;  $i$  – мнимая единица;  $\omega$  – частота колебаний (собственная частота либо частота вынужденных колебаний).

Данный обобщенный конечный элемент может быть сведен к любому из представленных на рис. 2.1.а элементов внешней цепи. В этом случае при составлении



матрицы жесткости конечного элемента (2.29) из множителя перед матрицей исключаются соответствующие слагаемые. Так, например, можно получить матрицы жесткости для каждой из составляющих обобщенного элемента по отдельности:

$$\begin{aligned} [k_{el}^L] &= -\frac{1}{\omega^2 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ [k_{el}^R] &= \frac{1}{i\omega R} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ [k_{el}^C] &= C \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Для формирования итогового разрешающего уравнения метода конечных элементов необходимо вначале выполнить процедуру ансамблирования глобальных матриц, которая выполняется суммированием элементных матриц жесткости вида (2.19-2.20), (2.25-2.26), по всем конечным элементам:

$$\begin{aligned} [K^{V_1}] &= \sum_{i=1}^{N_{el}^{V_1}} [k_{el}^{V_1}]; \\ [M^{V_1}] &= \sum_{i=1}^{N_{el}^{V_1}} [m_{el}^{V_1}]; \\ [K^{V_2}] &= \sum_{i=1}^{N_{el}^{V_2}} [k_{el}^{V_2}]; \\ [M^{V_2}] &= \sum_{i=1}^{N_{el}^{V_2}} [m_{el}^{V_2}]; \end{aligned} \quad (2.31)$$

а также вычислить глобальные векторы узловых усилий, которые также будут суммироваться по всем конечным элементам:

$$\begin{aligned} [F^{V_1}] &= \sum_{i=1}^{N_{el}^{V_1}} [f_{el}^{V_1}]; \\ [P^{V_1}] &= \sum_{i=1}^{N_{el}^{V_1}} [p_{el}^{V_1}]; \\ [F^{V_2}] &= \sum_{i=1}^{N_{el}^{V_2}} [f_{el}^{V_2}]; \\ [P^{V_2}] &= \sum_{i=1}^{N_{el}^{V_2}} [p_{el}^{V_2}]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

В результате типовые процедуры метода конечных элементов приводят задачу о вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругого тела с внешними цепями, описываемую уравнением (1.68), к следующей системе линейных алгебраических

уравнений:

$$([K] - \omega^2 [M] + [C(\omega)])\{\delta\} = \{F\}, \quad (2.33)$$

где  $[K] = [K^{V_1}] + [K^{V_2}]$  – глобальная матрица жесткости для всего кусочно-однородного тела;  $[M] = [M^{V_1}] + [M^{V_2}]$  – глобальная матрица масс всего тела,  $\{\delta\}$  – глобальный вектор узловых неизвестных,  $\{F\}$  – глобальный вектор узловых усилий. Глобальная матрица  $[C(\omega)] = \sum_{i=1}^{N_{el}^{cir}} [k_{el}^{cir}]$  отвечает за внешнюю электрическую цепь и, с учетом соотношений

(2.30), может быть представлена в виде:

$$[C(\omega)] = -\sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\omega^2 L_p} [K_{L_p}] + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i\omega R_q} [K_{R_q}] + \sum_{r=1}^{n_C} C_r [K_{C_r}], \quad (2.34)$$

где  $n_L$ ,  $n_R$ ,  $n_C$  – количество индуктивных, резистивных и емкостных элементов соответственно. Матрицы  $[K_{L_p}]$ ,  $[K_{R_q}]$ ,  $[K_{C_r}]$  имеют размерность глобальной матрицы жесткости, но содержат только коэффициенты (1) и (-1) на позициях, относящихся к узловым переменным соответствующих элементов.

Задача о собственных колебаниях электровязкоупругого тела с внешними цепями, описываемая уравнением (1.69), при использовании приведенных выше конечно-элементных соотношений сводится к следующей алгебраической проблеме собственных значений:

$$([K] - \omega^2 [M] + [C(\omega)])\{\delta\} = 0, \quad (2.35)$$

Уравнение (2.35) существенно отличаются от обобщенной проблемы на собственные значения наличием матрицы  $[C(\omega)]$ , описывающей внешнюю электрическую цепь.

В случае кусочно-однородного электровязкоупругого тела, состоящего из  $N$  электроупругих и  $M$  вязкоупругих частей, общую матрицу жесткости  $[K]$  можно представить в виде суммы соответствующих пьезоэлектрических и вязкоупругих частей  $[K_P^n]$  и  $[K_{vis}^m]$ :

$$[K] = \sum_{n=1}^N [K_P^n] + \sum_{m=1}^M [K_{vis}^m]. \quad (2.36)$$

В свою очередь, матрицу жесткости  $m$ -й вязкоупругой части, согласно

соотношениям (1.33-1.47), можно представить в виде:

$$[K_{vis}^m] = \tilde{B}^{(m)} [K_B^m] + \tilde{G}^{(m)} [K_B^m]. \quad (2.37)$$

При численной реализации поставленной задачи методом конечных элементов основное разрешающее уравнение в матричной форме окончательно приобретает следующий вид:

$$\left( \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N [K_P^n] + \sum_{m=1}^M \left[ \left( G_{Re}^{(m)} [K_G^m] + B_{Re}^{(m)} [K_B^m] \right) + i \left( G_{Im}^{(m)} [K_G^m] + B_{Im}^{(m)} [K_B^m] \right) \right] - \\ - \omega^2 [M] - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\omega^2 L_p} [K_{L_p}] + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i\omega R_q} [K_{R_q}] + \sum_{r=1}^{n_C} C_r [K_{C_r}] \end{array} \right) \{\delta\} = \{0\}, \quad (2.38)$$

здесь:

$[K_P^n]$  – матрица жесткости  $k$ -й пьезоэлектрической части;

$[K_B^m]$ ,  $[K_G^m]$  – объемная и сдвиговая компоненты матрицы жесткости  $l$ -й вязкоупругой части;

$[M]$  – матрица масс всей конструкции;

$[K_{L_p}]$  – матрицы для электрических элементов цепи в виде индуктивности (всего –  $n_L$ );

$[K_{R_q}]$  – матрицы для электрических элементов цепи в виде резисторов (всего –  $n_R$ );

$[K_{C_r}]$  – матрицы для электрических элементов цепи в виде емкости (всего –  $n_C$ );

$L_p$ ,  $R_q$ ,  $C_r$  – величины сопротивления, индуктивности и емкости соответственно;

$\omega = \omega_{Re} + i\omega_{Im}$  – искомая комплексная собственная частота колебаний системы.

## 2.2. Конечно-элементный алгоритм решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями на основе пакета ANSYS

Как известно, разработка полной программы, реализующей алгоритм решения методом конечных элементов, начиная от построения геометрической модели и заканчивая обработкой результатов вычислений, является достаточно сложным и трудоемким процессом. На сегодняшний день существует множество различных коммерческих пакетов конечно-элементного анализа (ANSYS, Abaqus и т.д.), в которых реализованы возможности

решения различных задач (в т.ч. связанных) механики сплошных сред. Однако ни в одном из существующих пакетов не реализована возможность решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями в постановке, приведенной в главе 1. При этом, например, в пакете ANSYS возможность решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях, в соответствии с математической постановкой, реализована в полном объеме, включая описание вязкоупругих свойств посредством комплексных динамических модулей и возможность моделирования динамического поведения внешних электрических цепей.

Поскольку решение задачи о вынужденных установившихся колебаниях в пакете прикладных программ ANSYS возможно осуществить напрямую, выглядит логичным использовать некоторые возможности данного пакета, в частности – инструменты построения геометрической модели и разбиения на конечно-элементную сетку, для построения алгоритма решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электро-вязкоупругих тел с внешними электрическими цепями. В пакете прикладных программ ANSYS реализована возможность выгрузки информации о геометрии и конечно-элементной сетке, из которой впоследствии можно сформировать матрицы жесткости, масс и т.д. Помимо этого, в ANSYS можно напрямую получить глобальные матрицы жесткости и масс, однако вид этих матриц не позволяет напрямую использовать их для формирования уравнения (2.38). Тем не менее, в ANSYS реализован способ проводить алгебраические операции сложения/вычитания и умножения/деления над сформированными глобальными матрицами. Данная особенность позволяет получить из глобальных матриц, формирующихся автоматически в процессе решения, все необходимые для уравнения (2.38) матрицы. Таким образом, в общем виде алгоритм решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электро-вязкоупругих тел с внешними электрическими цепями можно представить в виде схемы, приведенной на рис.2.4.

Однако при использовании пакета ANSYS для построения численного алгоритма решения задачи приходится сталкиваться с серьезными ограничениями. Одним из основных является то, что из ANSYS напрямую можно получить только 3 вида матриц: глобальную матрицу жесткости  $[K]$ , глобальную матрицу масс  $[M]$  и глобальную матрицу демпфирования  $[C]$ . Причем, в таком виде их можно получить только из модуля модального анализа (задача о собственных колебаниях). Во всех остальных случаях (статический анализ, гармонический анализ, анализ переходных процессов) формируется

единственная глобальная матрица  $[K]$ , в которую входят сразу механические, демпфирующие и массовые характеристики рассматриваемого объекта из которой невозможно получить необходимые для решения задачи матрицы (см. рис.2.4).

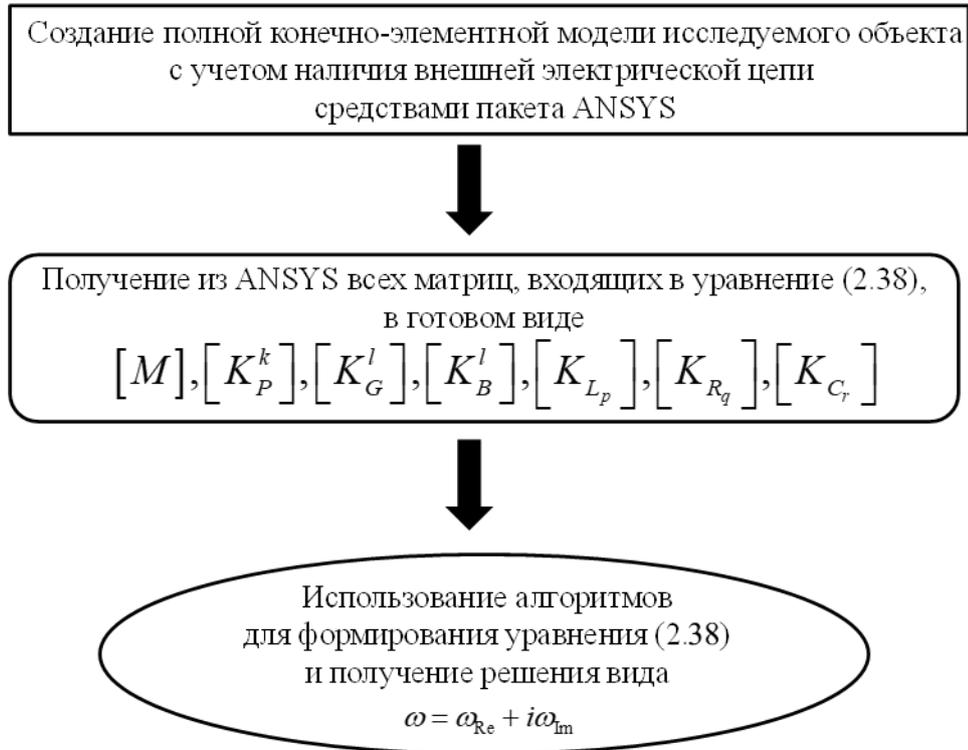


Рисунок 2.4. – Общая схема решения задачи методом конечных элементов

Единственным возможным вариантом для получения матриц, входящих в (2.38), является использование модуля модального анализа. Однако и в этом случае имеется ряд ограничений, приводящих к необходимости разработки дополнительных вспомогательных алгоритмов, которые позволят получить все необходимые матрицы путем разделения глобальной матрицы жесткости  $[K]$ .

Первая проблема, с которой приходится сталкиваться при использовании модуля модального анализа ANSYS – невозможность учета вязкоупругих свойств материала, описываемых комплексными динамическими модулями в формулировке (1.47). Это связано с тем, что в ANSYS реализован модуль модального анализа, позволяющий решать задачи на собственные значения, которые описываются матричным уравнением вида (2.39):

$$(-\omega^2 [M] + i[D] + [K])\{\delta\} = 0. \quad (2.39)$$

Здесь  $[D]$  – матрица демпфирования, в общем случае имеющая следующий вид [166]:

$$\begin{aligned}
 [D] = \omega \left( \alpha [M] + \beta [K] + \sum_{i=1}^N \alpha_i [M_i] + \sum_{j=1}^M \beta_j [K_j] + \sum_{k=1}^K [C_k] + \sum_{l=1}^L [G_l] \right) + \\
 + g [K] + \sum_{p=1}^P 2m_p [K_p].
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

Как видно из (2.39-2.40), посредством матрицы  $[D]$  в систему вводится учет диссипации энергии, реализованной за счет различных механизмов. Основная часть данных механизмов добавляет в систему демпфирование, пропорциональное скорости (первой производной от перемещений, вид которых определен в (1.2)) путем введения соответствующих множителей  $\alpha$  и  $\beta$ , на которые будут домножаться матрицы масс  $[M]$  или жесткости  $[K]$ , соответственно. Задать данный вид демпфирования возможно как для всей конструкции, так и для ее отдельных частей, выполненных из различных материалов, путем домножения на  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  не полных матриц жесткости и масс, а только их  $i$ -х и  $j$ -х частей  $[M_i]$  и  $[K_j]$ .

Помимо этого, возможно задать некоторое демпфирование, реализованное в отдельных конечных элементах (с помощью элементных матриц демпфирования  $[C_k]$ ), либо кориолисово демпфирование за счет сил инерции, возникающих при вращении, и также реализующегося в отдельных элементах (задается с помощью элементных матриц  $[G_l]$ ). Помимо этого, возможно добавить в систему некий механизм диссипации энергии за счет введения коэффициентов демпфирования  $g$  и  $m_p$ , на которые умножается матрица жесткости  $[K]$  (либо на ее часть  $[K_p]$ , относящуюся к конкретному материалу). При этом данный механизм добавляет в систему диссипацию, которая пропорциональна непосредственно перемещениям (в отличие от описанных ранее механизмов, которые пропорциональны скорости). Подробное описание данных механизмов учета диссипации энергии приведено в [166]. Других механизмов учета диссипации энергии в модальном анализе ANSYS не предусмотрено.

В результате данные ограничения пакета ANSYS приводят к необходимости разработки алгоритма, позволяющего представить матрицу жесткости  $[K^n]$   $n$ -й

составляющей вязкоупругого тела в виде суммы двух слагаемых, пропорциональных сдвиговому модулю  $G$  и модулю объемного сжатия  $B$ :

$$[K^n] = B[K_B^n] + G[K_G^n]. \quad (2.41)$$

Вторая проблема состоит в том, что реализация в модальном анализе ANSYS алгоритма решения матричного уравнения только вида (2.39) не позволяет рассматривать поставленную выше задачу о собственных колебаниях электроупругих тел с электрическими цепями, в которой диссипативные процессы происходят за счет наличия внешней электрической цепи.

Для моделирования внешних электрических цепей в ANSYS присутствуют двухузловые конечные элементы, моделирующие реальные резистивные ( $R$ ), индуктивные ( $L$ ) и емкостные ( $C$ ) элементы электрической цепи, которые описываются матричными соотношениями, аналогичными (2.30). Так как для резистивных и индуктивных элементов у данных матриц имеются множители, зависящие от частоты (2.30), их нельзя использовать в модальном анализе в силу описанных выше особенностей решателя. При этом возможность использования конечных элементов для описания реальных емкостных элементов остается в силу отсутствия в матричных соотношениях для данных элементов частотно-зависимого множителя. В результате использования данных конечных элементов в модуле модального анализа ANSYS вклад от них будет учтен при формировании глобальной матрицы жесткости  $[K]$ .

Таким образом возникает необходимость в разработке алгоритма, который позволит получить матрицы жесткости элементов электрической цепи  $[K_{L_p}]$ ,  $[K_{R_q}]$ ,  $[K_{C_r}]$  из глобальной матрицы жесткости  $[K]$ , сформированной в модуле модального анализа ANSYS на основе использования только конечных элементов емкостного типа.

Эти две проблемы привели к необходимости разработки дополнительных вспомогательных алгоритмов, которые позволят получить все необходимые матрицы, входящие в уравнение (2.38), путем декомпозиции глобальной матрицы жесткости  $[K]$ , получаемой из модуля модального анализа ANSYS.

Для преодоления данных двух сложностей был разработан специальный алгоритм, реализованный на языке APDL (ANSYS Parametric Design Language), состоящий в разделении глобальной матрицы жесткости  $[K]$ , полученной из модуля модального

анализа, на матрицы  $[K_{vis}^n]$ ,  $[K_P^m]$  и  $[C(\omega)]$ , где матрицы  $[K_{vis}^n]$  будут содержать элементы только для  $n$ -й вязкоупругой части конструкции,  $[K_P^m]$  – элементы только для  $m$ -й пьезоэлектрической части,  $[C(\omega)]$  – только элементы внешней электрической цепи. Полученные матрицы  $[K_{vis}^n]$  и  $[C(\omega)]$ , в свою очередь, разделяются следующим образом:  $[K_{vis}^n]$  – на матрицы  $[K_G^n]$  и  $[K_B^n]$ ,  $[C(\omega)]$  – на матрицы  $[K_{L_p}]$ ,  $[K_{R_q}]$ ,  $[K_{C_r}]$ .

В общем виде алгоритм получения всех матриц, входящих в уравнение (2.38), можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 2.5.

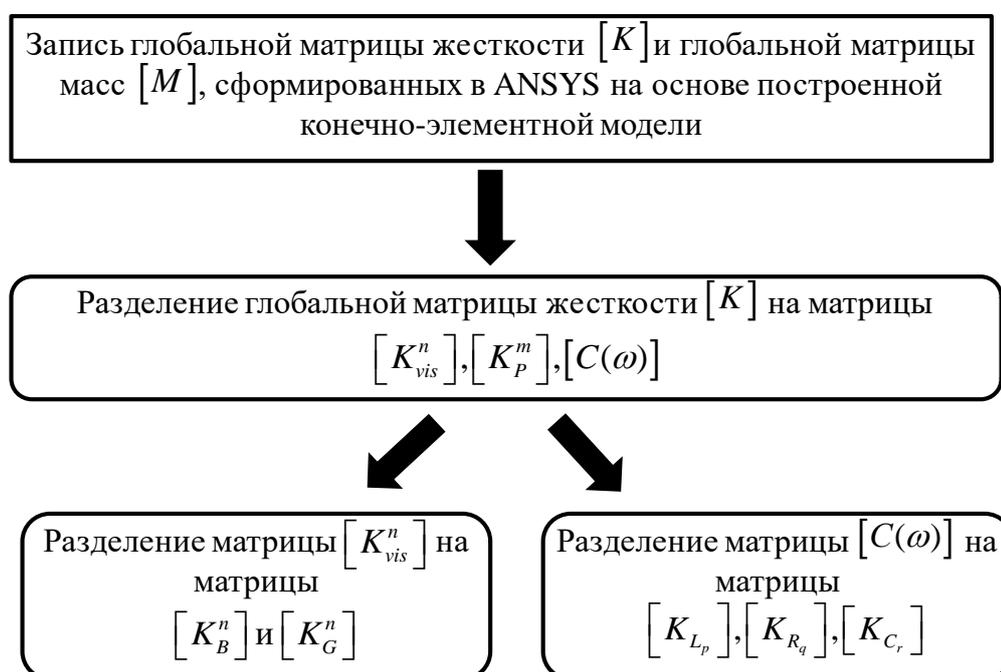


Рисунок 2.5. – Алгоритм получения из ANSYS матриц, входящих в уравнение (2.38).

Для разделения глобальной матрицы жесткости  $[K]$  на составные элементы, относящиеся к различным частям рассматриваемого объекта (упругие, вязкоупругие, пьезоэлектрические элементы и элементы внешней цепи), был использован подход, описанный в работе [167]. Суть его заключается в том, чтобы за счет варьирования значений материальных констант и математических операций сложения/вычитания произвести декомпозицию матрицы  $[K]$  на необходимые составные элементы.

Прежде чем перейти непосредственно к алгоритмам разделения матриц, необходимо



построить полную конечно-элементную модель исследуемой конструкции. На этом этапе задается ее геометрия, указываются физико-механические свойства материалов, и производится разбиение на конечные элементы. При построении конечно-элементной модели используется комбинация квадратичных 20-ти узловых конечных элементов SOLID186 и SOLID226 [166]. Конечно-элементные соотношения для данных типов элементов пакета ANSYS аналогичны приведенным в разделе 2.1, что позволяет использовать их для реализации алгоритма решения задачи в рассматриваемой постановке. Необходимо отметить, что разделение матрицы жесткости на объемную и сдвиговую компоненты в виде (2.5) справедливо только при использовании конечных элементов, описываемых соотношениями, приведенными в главе 2, чем и объясняется выбор в ANSYS указанных выше конечных элементов.

Как уже отмечалось выше, в ANSYS для моделирования электрических цепей используются специальные двухузловые конечные элементы, матрицы жесткости которых  $[K_L^{el}]$ ,  $[K_R^{el}]$ ,  $[K_C^{el}]$  для индуктивных, резистивных и емкостных элементов, соответственно, имеют вид, аналогичный (2.30).

Как видно из уравнения (2.38), перед матрицами  $[K_{L_p}]$ ,  $[K_{R_q}]$ ,  $[K_{C_r}]$  стоят соответствующие множители, включающие в себя характеристики конкретных типов элементов. Так как в эти матрицы не входят никакие характеристики элементов цепи, то тип элементов для получения данных матриц из ANSYS можно выбирать произвольно. В результате получается матрица с нужной структурой для каждого конкретного элемента цепи. В силу описанных выше ограничений пакета ANSYS, в дальнейшем вся электрическая цепь моделируется только емкостными элементами.

Исходя из описанных выше ограничений пакета ANSYS, единственным возможным вариантом записи матриц, который позволит получить все необходимые для формирования уравнения (2.38) матрицы, является использование модуля модального анализа. Как известно из теории МКЭ, после процедуры ансамблирования глобальной матрицы (не важно, жесткости, масс или демпфирования) получается сильно разреженная ленточная матрица. Другими словами, в такой матрице имеется большое количество нулевых элементов. Для такого вида матриц существует несколько способов, позволяющих хранить только ненулевые элементы. При экспортировании матриц из ANSYS они выводятся в формате Harwell-Boeing (более подробно этот формат хранения описан, например в [168]). Поскольку ансамблированные в ANSYS матрицы являются симметричными, в формате

Harwell-Boeing будет храниться только верхняя треугольная часть матрицы.

Необходимо отметить, что запись матриц невозможна без предварительной записи бинарного файла базы данных ANSYS вида jobname.full. Для записи этого файла предварительно необходимо указать все параметры решателя, как если бы мы собирались получить решение задачи. Таким образом, на выходе получается бинарный файл базы данных, из которого можно будет извлечь интересующие нас матрицы.

Процесс записи матриц осуществляется во вспомогательном процессоре ANSYS – AUX2, который позволяет извлекать различную информацию из бинарных файлов ANSYS [166]. С помощью команды HBMAT в данном вспомогательном процессоре можно получить готовые матрицы в формате Harwell-Boeing. В результате выполнения данной команды получаем два файла: первый – ансамблированная матрица и второй – так называемый файл разметки (mapping file). В файле разметки хранится структура системы уравнений, т.е. в нем указано: какому узлу и какой узловой неизвестной соответствует каждое уравнение.

Поскольку все манипуляции осуществляются исключительно с матрицей жесткости после того, как все операции построения геометрии и разбиения на конечные элементы закончены, можно записать непосредственно файл глобальной матрицы масс  $[M]$  и соответствующий ей файл разметки системы уравнений. Файл разметки можно записывать один раз, поскольку структура системы уравнений будет постоянной вне зависимости от манипуляций с матрицей жесткости.

На данном этапе в нашем распоряжении имеется готовая конечно-элементная модель рассматриваемого объекта. Теперь путем варьирования материальных параметров необходимо получить набор глобальных матриц жесткости, из которых будут получены все необходимые для формирования уравнения (2.38) матрицы.

В силу анизотропии свойств пьезоэлектрического материала крайне проблематичным является получение представления матрицы  $[K_p^n]$  в виде произведения вещественного множителя, являющегося физической константой материала, и матрицы, содержащей коэффициенты, не зависящие от материальных характеристик. В связи с этим, материальные параметры пьезоэлектрического материала будут оставаться неизменными на протяжении всего процесса декомпозиции матрицы  $[K]$ . Соответственно, варьироваться будут параметры материала  $E$ ,  $\nu$ , относящиеся к вязкоупругой части и значения характеристик элементов внешней цепи.

Алгоритм разделения матриц рассмотрим на примере кусочно-однородного электровязкоупругого тела, состоящего из одной вязкоупругой составляющей и одной пьезоэлектрической составляющей с внешней электрической цепью произвольного вида.

В ANSYS для моделирования электрических цепей используются специальные двухузловые конечные элементы, матрицы жесткости которых  $[K_L^{el}]$ ,  $[K_R^{el}]$ ,  $[K_C^{el}]$  для индуктивных, резистивных и емкостных элементов имеют вид (2.30). Как видно из уравнений (2.6, 2.30), структура матриц  $[K_L^{el}]$ ,  $[K_R^{el}]$ ,  $[K_C^{el}]$  одинакова, различие состоит только в множителях, которые в уравнении (2.38) присутствуют также в виде множителей для глобальных матриц  $[K_{L_p}]$ ,  $[K_{R_q}]$ ,  $[K_{C_r}]$ .

Так как в эти матрицы не входят конкретизирующие тип элемента характеристики элементов цепи, то тип элементов для получения данных матриц из ANSYS можно выбирать произвольно, при этом получить матрицу жесткости с нужной структурой для каждого элемента цепи. Это позволило в дальнейшем для получения матрицы жесткости, описывающей электрическую цепь, все элементы цепи (сопротивление, индуктивность, ёмкость) моделировать только емкостными элементами.

Характеристики элементов внешних цепей, такие как емкость, индуктивность и сопротивление, задаются в ANSYS с помощью набора вещественных констант (Real Constants [166]). Для того, чтобы иметь возможность по отдельности получить матрицу жесткости для каждого элемента цепи, необходимо задать столько наборов вещественных констант, сколько элементов содержится в цепи. Если, например, реальная цепь состоит из резистора, двух катушек индуктивности и одного конденсатора, при моделировании будет использоваться 4 конечных элемента. Следовательно, нужно задать 4 набора вещественных констант. Для дальнейшего удобства условимся, что вещественные константы для элементов внешней цепи могут принимать значения только 1 или 2.

На первом этапе формируется глобальная матрица жесткости  $[K_0^{cir}]$ , для которой значения вещественных констант для всех элементов цепи устанавливаются равными 1 Ф. Поскольку вся внешняя цепь для получения матриц, входящих в (2.38) моделируется емкостными конечными элементами, задаваемые материальные константы будут иметь физический смысл емкости. Далее, изменяя значения вещественных констант последовательно для каждого из элементов внешней цепи с 1 Ф на 2 Ф, записывается еще

$Z$  глобальных матриц жесткости  $[K_i^{cir}]$  ( $Z$  – количество элементов внешней цепи), где  $i = \overline{1, Z}$  номер элемента внешней цепи, для которого вещественная константа принимает значение  $2\Phi$ . Важно отметить, что вещественная константа должна принимать значение  $2\Phi$  только для одного  $i$ -го элемента внешней цепи, для всех остальных элементов значение должно оставаться равным 1.

В результате матрицы жесткости для каждого  $i$ -го элемента цепи  $[K_{Cir(i)}]$  (сопротивление, индуктивность, ёмкость) можно получить путем вычитания матрицы  $[K_0^{cir}]$  из матрицы  $[K_i^{cir}]$ :

$$[K_{Cir(i)}] = [K_i^{cir}] - [K_0^{cir}]. \quad (2.42)$$

Поскольку материальные характеристики континуальной части (вязкоупругой и пьезоэлектрической составляющих) не были изменены в процессе записи матриц  $[K_i^{cir}]$ , при выполнении операций (2.42) все компоненты матриц, относящихся к конструкции, будут равны нулю. После выполнения всех операций вида (2.42) получаем матрицы  $[K_{Cir(i)}]$  с размерностью, соответствующей общей размерности итоговой разрешающей системы уравнений, при этом в них будут присутствовать только (1) и (-1) на тех позициях, которые относятся к узловым неизвестным соответствующего элемента электрической цепи.

В результате получается матрица с нужной структурой для каждого конкретного элемента цепи. В зависимости от типа элемента в реальной электрической цепи, данные матрицы  $[K_{Cir(i)}]$  необходимо домножить на соответствующие множители:  $\frac{1}{\omega^2 L}$  для индуктивного элемента,  $-\frac{i}{\omega R}$  для резистивного элемента,  $C$  для ёмкостного элемента при подстановке в (2.38), где они и приобретут смысл матриц  $[K_{L_p}]$ ,  $[K_{R_q}]$ ,  $[K_{C_r}]$ .

Следующим этапом является выделение из глобальной матрицы жесткости  $[K]$  матрицы жесткости, относящейся к объему  $V_2$  пьезоэлектрической составляющей ( $[K_p]$ ). В силу анизотропии свойств пьезоэлектрического материала крайне проблематичным является получение представления матрицы  $[K_p]$  в виде произведения вещественного множителя, являющегося физической константой материала, и матрицы, содержащей

коэффициенты, не зависящие от материальных характеристик.

Введем два допущения:

1. Материальные параметры пьезоэлектрического материала остаются неизменными на протяжении всего процесса декомпозиции матрицы  $[K]$ ;

2. Для получения матрицы жесткости нужной структуры вязкоупругие элементы рассматриваются как упругие изотропные, так как структура физических соотношений для упругих и вязкоупругих частей тела одинакова (1.33, 1.47). При этом варьируются параметры материала  $E$ ,  $\nu$ , относящиеся только к вязкоупругой части.

Получим две дополнительные глобальные матрицы жесткости. Для формирования первой матрицы  $[K_1]$  примем значения материальных параметров вязкоупругой части конструкции (используя допущение 2)  $E_1 = 1 \text{ Па}$ ,  $\nu_1 = 0.1$ . При этом значения вещественных констант для всех элементов электрической цепи принимаются равными 1. Для получения второй матрицы  $[K_2]$  значения материальных параметров примем соответственно  $E_2 = 2 \text{ Па}$ ,  $\nu_2 = 0.1$ . Материальные константы должны выбираться таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $E_2 - E_1 = 1$ . Это позволяет получить матрицу жесткости, относящуюся только к пьезоэлектрической части и содержащую всю информацию о характеристиках материала.

После формирования матриц  $[K_1]$  и  $[K_2]$  матрицу жесткости пьезоэлектрической части рассматриваемого объекта можно будет получить следующим образом.

Вначале необходимо выделить из общей глобальной матрицы жесткости часть, в которой будут присутствовать только элементы, относящиеся к вязкоупругой области (отметим, что на данном этапе она несет вспомогательную роль, и в дальнейшем использоваться не будет)  $[K_{2-1}]$ :

$$[K_{2-1}] = [K_2] - [K_1]. \quad (2.43)$$

После этого матрица жесткости, относящаяся к пьезоэлектрической части тела, может быть получена как

$$[K_p] = [K_1] - [K_{2-1}] - \sum_{i=1}^Z [K_{Cir(i)}]. \quad (2.44)$$

Важно отметить, что полученная таким образом матрица  $[K_p]$ , в отличие от матриц  $[K_{Cir(i)}]$ , будет содержать всю информацию о физико-механических характеристиках

пьезоэлектрического материала. Соответственно, при подстановке в (2.38) она не будет домножаться ни на какие коэффициенты.

Для того, чтобы при решении задачи о собственных колебаниях вязкоупругого тела можно было использовать матрицу жесткости, полученную для соответствующего упругого тела, последнюю необходимо представить в виде объемной  $[K_B]$  и сдвиговой  $[K_G]$  компонент (2.5), пропорциональных объемному и сдвиговому модулям (см. выше допущение 2). Такая структура матрицы жесткости позволяет осуществить переход к используемой модели вязкоупругого тела (1.41-1.47) путем замены констант  $G$  и  $B$  на соответствующие выражения, описывающие вязкоупругое поведение. Так как программный комплекс ANSYS не позволяет представить глобальную матрицу жесткости в виде компонент, пропорциональных объемному и сдвиговому модулям, то воспользуемся алгоритмом, приведенным в работе [167].

Для изотропного тела могут быть заданы только технические константы: модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . Для получения матриц  $[K_B]$  и  $[K_G]$ , входящих в (2.38), сформируем в ANSYS две матрицы жесткости с различными значениями констант  $E$ ,  $\nu$ . Вещественные константы для элементов электрической цепи, приняты равными 1 Ф. Для получения первой матрицы  $[K_{vis}^{01}]$  примем  $E_{01} = 1 \text{ Па}$ ,  $\nu_{01} = 0.1$ . Для получения второй матрицы  $[K_{vis}^{02}]$  примем  $E_{02} = 2 \text{ Па}$ ,  $\nu_{02} = 0.2$ .

Далее в полученных матрицах выделяем компоненты, относящиеся только к вязкоупругой части рассматриваемой конструкции, в которой не содержится информации о пьезоэлектрической части рассматриваемого тела и об элементах внешней цепи. Сделать это можно следующим образом:

$$\begin{aligned} [K_{vis}^1] &= [K_{vis}^{01}] - [K_P] - \sum_{i=1}^Z [K_{Cir(i)}]; \\ [K_{vis}^2] &= [K_{vis}^{02}] - [K_P] - \sum_{i=1}^Z [K_{Cir(i)}]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

В результате из матриц, полученных на основе (2.45), можно сформировать следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} [K_{vis}^1] = a_1 [K_B] + b_1 [K_G] \\ [K_{vis}^2] = a_2 [K_B] + b_2 [K_G] \end{cases}, \quad (2.46)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{E_{01}}{3-6\nu_{01}}; \quad a_2 = \frac{E_{02}}{3-6\nu_{02}}; \quad b_1 = \frac{E_{01}}{2+2\nu_{01}}; \quad b_2 = \frac{E_{02}}{2+2\nu_{02}}.$$

Решая систему (2.46), получаем следующие соотношения для определения матриц  $[K_b]$  и  $[K_g]$ :

$$\begin{cases} [K_B] = \frac{b_1 [K_{vis}^2] - b_2 [K_{vis}^1]}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \\ [K_G] = \frac{a_2 [K_{vis}^1] - a_1 [K_{vis}^2]}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \end{cases} \quad (2.47)$$

Полученные таким образом матрицы  $[K_B]$  и  $[K_G]$  содержат только «геометрические» элементы и не содержат информацию о материале. При подстановке этих матриц в уравнение (2.38) их необходимо домножить на соответствующие значения комплексных динамических модулей.

Выше были описаны алгоритмы получения матриц жесткости  $[K_p]$ ,  $[K_B]$  и  $[K_G]$  для кусочно-однородного электровязкоупругого тела, состоящего из одной вязкоупругой и одной пьезоэлектрической частей. Если рассматриваемое кусочно-однородное электровязкоупругое тело состоит из  $N$  электроупругих и  $M$  вязкоупругих элементов, для получения всех необходимых матриц алгоритм для выделения матрицы вязкоупругого тела, необходимо повторить  $N$  раз, а алгоритм для разделения матрицы вязкоупругого тела на объемную и сдвиговую составляющие, соответственно  $M$  раз.

После получения всех необходимых матриц в отдельной программе, написанной на языке FORTRAN, формируется уравнение вида (2.38), которое решается относительно неизвестных комплексных собственных частот колебаний системы  $\omega$ . Условием существования нетривиального решения уравнения (2.38) является равенство нулю определителя (3.9)

$$D(\omega) = \det \left( \begin{array}{c} \sum_{k=1}^N [K_p^k] + \sum_{l=1}^M \left[ \left( G_{\text{Re}}^{(l)} [K_G^l] + B_{\text{Re}}^{(l)} [K_B^l] \right) + i \left( G_{\text{Im}}^{(l)} [K_G^l] + B_{\text{Im}}^{(l)} [K_B^l] \right) \right] - \\ - \omega^2 [M] - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\omega^2 L_p} [K_{L_p}] + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i\omega R_q} [K_{R_q}] + \sum_{r=1}^{n_C} C_r [K_{C_r}] \end{array} \right) = 0 \quad (2.48)$$

При выборе алгоритма решения алгебраической проблемы собственных значений необходимо учитывать большую размерность алгебраической задачи и возможность решения алгебраической проблемы комплексных собственных значений. Следует

отметить, что для рассматриваемых задач имеет смысл решать только частичную проблему собственных значений, то есть, определять не весь спектр собственных частот, а только какую-то его часть. Последнее обстоятельство выдвигает жесткое условие, состоящее в том, что собственные значения должны быть гарантированно определены либо в заданном интервале, либо в требуемой последовательности, например, в порядке возрастания действительных частей в случае комплексных собственных значений. С учетом вышесказанного, для решения поставленной задачи использовался метод Мюллера [169], реализованный на языке FORTRAN, с различными сценариями выбора начальных приближений.

### 2.3. Апробация алгоритма

Для демонстрации достоверности результатов, получаемых на основе предложенного алгоритма, проведена серия вычислительных экспериментов. В качестве объекта исследования выбрана консольно-защемленная пластинка с размещенным на ее поверхности пьезоэлектрическим элементом (рис.2.6).

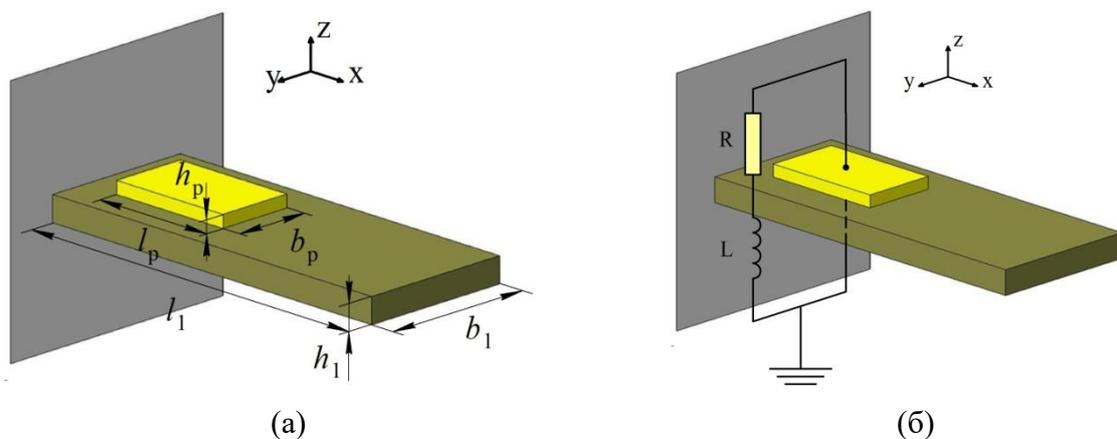


Рисунок 2.6. – Расчетные схема для консольно-защемленной пластинки с присоединенным пьезоэлементом (а) и внешней последовательной  $RL$ -цепью (б)

Размеры пластины:  $l_1 = 400$  мм,  $b_1 = 100$  мм,  $h_1 = 1$  мм. Размеры прямоугольного пьезоэлемента:  $l_p = 50$  мм,  $b_p = 20$  мм,  $h_p = 0.36$  мм. Центр масс пьезоэлемента расположен на расстоянии 35 мм от заделки и в середине по ширине пластины (50 мм от края).



Пьезоэлемент выполнен из пьезокерамики ЦТС-19 (цирконат-титанат свинца), поляризован в направлении оси  $z$ , имеет следующие физико-механическими характеристиками:  $C_{11} = C_{22} = 10.9 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{13} = C_{23} = 5.4 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{12} = 6.1 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{33} = 9.3 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{44} = C_{55} = C_{66} = 2.4 \cdot 10^{10}$  Па,  $\beta_{13} = \beta_{23} = -4.9$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\beta_{33} = 14.9$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\beta_{51} = \beta_{42} = 10.6$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 8.2 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $\varepsilon_{33} = 8.4 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $\rho = 7500$  кг/м<sup>3</sup>. Пластина выполнена из изотропного материала, со следующими физико-механическими характеристиками:  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu = 0.34$ ,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>.

В качестве одного из вариантов оценки достоверности получаемых результатов был проведен анализ сходимости на примере пластины из упругого материала, к поверхности которой прикреплен пьезоэлемент (рис.2.6) с присоединенной внешней последовательной  $RL$ -цепью, состоящей из последовательно соединенных резистора сопротивлением  $R$  и катушки индуктивности с индуктивностью  $L$ . Для расчетов выбраны следующие значения параметров цепи:  $L = 300$  Гн,  $R = 8000$  Ом.

Выполненные расчеты демонстрируют сходимость результатов. В частности, для первой частоты колебаний различие результатов при 510 и 5678 узловых неизвестных составляет для действительной части 0.8 %, а при 5678 и 13323 узловых неизвестных – 0.09 %, для мнимой части – 20.5% и 3.7%, соответственно. Таким образом, при увеличении степени дискретизации системы наблюдается сходимость решения как по действительной, так и по мнимой части. Стоит отметить, что степень сходимости по действительной и мнимой частям различается примерно на порядок. Данное явление можно объяснить тем, что значения мнимых частей определяются наличием только единственного резистивного элемента, вклад от которого в общую матрицу жесткости определяется всего 4-мя коэффициентами. В результате, для получения устойчивого решения по мнимой части при отсутствии дополнительных механизмов диссипации, нам необходима более высокая степень дискретизации, по сравнению с необходимой для получения устойчивого решения по действительной части.

В ANSYS есть возможность задать демпфирование, пропорциональное матрице жесткости, с помощью коэффициентов  $g$  или  $m_p$  (2.40). Это является частным случаем модели вязкоупругости, описываемой комплексными динамическими модулями, при условии, что объемные и сдвиговые части комплексных модулей удовлетворяют условию

$$G_{\text{Im}}^{(n)} / G_{\text{Re}}^{(n)} = B_{\text{Im}}^{(n)} / B_{\text{Re}}^{(n)}.$$

Для этого варианта на примере пластины с пьезоэлементом было проведено сравнение результатов решений на основе ANSYS при  $m_p = \delta/2$  и на основе рассматриваемого алгоритма при  $\delta = G_{\text{Im}}^{(n)} / G_{\text{Re}}^{(n)} = B_{\text{Im}}^{(n)} / B_{\text{Re}}^{(n)}$ .

Таблица 2.1. Комплексные собственные частоты колебаний вязкоупругой конструкции с пьезоэлементом без внешних электрических цепей, при работе пьезоэлемента в режиме холостого хода

№ частоты	ANSYS $f = f_{\text{Re}} - if_{\text{Im}}$	Разработанный алгоритм $f = f_{\text{Re}} - if_{\text{Im}}$
1	5.527 - i 0.104	5.527 - i 0.104
2	33.841 - i 0.649	33.841 - i 0.649
3	42.153 - i 0.826	42.153 - i 0.826
4	93.643 - i 1.829	93.643 - i 1.829
5	130.201 - i 2.554	130.201 - i 2.554

Таблица 2.2. Комплексные собственные частоты колебаний вязкоупругой конструкции с пьезоэлементом без внешних электрических цепей, при работе пьезоэлемента в режиме короткого замыкания

№ частоты	ANSYS $f = f_{\text{Re}} - if_{\text{Im}}$	Разработанный алгоритм $f = f_{\text{Re}} - if_{\text{Im}}$
1	5.508 - i 0.103	5.507 - i 0.103
2	33.758 - i 0.648	33.758 - i 0.648
3	42.153 - i 0.826	42.153 - i 0.825
4	93.520 - i 1.827	93.520 - i 1.827
5	130.200 - i 2.553	130.200 - i 2.553

В таблицах 2.1 и 2.2 приведены результаты расчетов первых пяти комплексных собственных частот колебаний конструкции с пьезоэлементом, работающим в режиме холостого хода (таблица 2.1) и короткого замыкания (таблица 2.2) на основе разработанного алгоритма для варианта пластины из вязкоупругого материала с  $\delta = 0.04$ . При этом в ANSYS коэффициент демпфирования принят  $m_p = 0.02$ . Полученные результаты приведены в таблицах 2.1 и 2.2.

Отличие в полученных двумя подходами результатах составило 0.007%, что является одним из аргументов достоверности результатов, получаемых на основе разработанного алгоритма.

Таблица 2.3. Комплексные собственные частоты колебаний вязкоупругой конструкции с внешней последовательной  $RL$ -цепью с параметрами  $L = 10^{15}$  Гн,  $R = 10^{15}$  Ом (имитация режима холостого хода)

№ частоты	ANSYS $f = f_{Re} - if_{Im}$	Разработанный алгоритм $f = f_{Re} - if_{Im}$
1	5.527 - i 0.104	5.527 - i 0.104
2	33.841 - i 0.649	33.841 - i 0.649
3	42.153 - i 0.826	42.153 - i 0.826
4	93.643 - i 1.829	93.643 - i 1.829
5	130.201 - i 2.553	130.201 - i 2.553

Таблица 2.4. Комплексные собственные частоты колебаний вязкоупругой конструкции с внешней последовательной  $RL$ -цепью с параметрами  $L = 10^{-15}$  Гн,  $R = 10^{-15}$  Ом (имитация режима короткого замыкания)

№ частоты	ANSYS $f = f_{Re} - if_{Im}$	Разработанный алгоритм $f = f_{Re} - if_{Im}$
1	5.507 - i 0.103	5.507 - i 0.103
2	33.758 - i 0.648	33.758 - i 0.648
3	42.153 - i 0.826	42.153 - i 0.826
4	93.520 - i 1.827	93.521 - i 1.827
5	130.200 - i 2.553	130.201 - i 2.553

В качестве еще одной проверки правильности работы алгоритма проведена серия расчетов собственных частот колебаний конструкции, выполненной из вязкоупругого материала, при наличии присоединенной к пьезоэлементу внешней последовательной  $RL$ -цепи (рис.2.6). В этом случае задание параметров электрической цепи (и сопротивления, и индуктивности) пренебрежимо малы (порядка  $10^{-15}$ ), эквивалентно работе пьезоэлемента в режиме короткого замыкания при отсутствии внешней цепи, а задание очень больших значений (порядка  $10^{15}$ ) - в режиме холостого хода. Данная особенность позволяет провести сравнение результатов, полученных на основе разработанного алгоритма и в пакете ANSYS.

В таблицах 2.3 и 2.4 приведены результаты расчетов первых пяти комплексных собственных частот колебаний конструкции с пьезоэлементом и внешней последовательной  $RL$ -цепью, параметры которой соответствуют режимам холостого хода ( $L = 10^{15}$  Гн,  $R = 10^{15}$  Ом – таблица 2.3) и короткого замыкания ( $L = 10^{-15}$  Гн,  $R = 10^{-15}$  Ом – таблица 2.4). Вязкоупругие свойства материала определяются значением  $\delta = 0.04$ .

Для сравнения в таблицах 2.3 и 2.4 приведены значения комплексных собственных частот колебаний, полученных в пакете ANSYS при отсутствии внешней цепи и при коэффициенте демпфирования, равном  $m_p = 0.02$ . Данные, приведенные в таблицах 2.3 и 2.4 показывают, что результаты, полученные на основе разработанного алгоритма и на основе ANSYS, различаются не более чем на 0.02%.

Таким образом, проведенная серия вычислительных экспериментов доказала работоспособность, достоверность и эффективность предложенного алгоритма решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электро-вязкоупругих тел с внешними электрическими цепями.

## Глава 3. Выбор оптимальных вариантов компоновки упругих тел пьезоэлементами

### 3.1. Подбор компоновки упругих тел пьезоэлементами на основе анализа деформаций

Как было отмечено во введении, одним из вариантов для построения методики определения оптимального места расположения пьезоэлемента в конструкции является анализ картины распределения деформаций. Согласно работе [50], оптимальным местом для размещения пьезоэлемента является область конструкции с наибольшими по величине средними деформациями. В этом случае оценку эффективности работы пьезоэлемента можно производить по величине энергии деформации в зоне расположения пьезоэлемента. Оптимальные значения энергии деформирования могут быть получены из модального анализа. При этом можно предположить, что при малых размерах пьезоэлементов, которые при их встраивании в smart-конструкции не вносят существенных изменений в характер деформирования конструкции на собственных формах колебаний, для оценки энергии деформации могут быть использованы собственные формы колебаний конструкции без пьезоэлементов, то есть, результаты решения задачи о собственных колебаниях упругих или вязкоупругих тел.

Однако наибольшая энергия деформации конструкции в зоне предполагаемого размещения пьезоэлемента далеко не всегда гарантирует максимальную величину генерации электрической энергии. Это объясняется тем, что наиболее сильные пьезоэлектрические свойства пьезоэлемента проявляются в направлении его поляризации, т.е. максимальный заряд или электрический потенциал возникает на электродированных поверхностях пьезоэлемента, ортогональных направлению поляризации. Таким образом, для того чтобы пьезоэлемент обеспечивал наибольшую степень генерации электрической энергии, необходимо, чтобы нормальная деформация в направлении оси поляризации пьезоэлемента была максимальной.

Энергия упругой деформации определяется как

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (3.1)$$

откуда видно, что вклад в энергию деформации вносят все компоненты тензора деформаций. Таким образом, возможны ситуации, при которых среднее значение энергии

деформации в зоне расположения пьезоэлемента может быть наибольшим, но при этом преимущественное направление деформирования может не совпадать с направлением поляризации пьезоэлемента. В этом случае величина электрической энергии, генерируемой пьезоэлементом, может быть равна нулю, но при этом полная механическая энергия деформации конструкции может быть наибольшей.

В результате, для того чтобы корректно определить оптимальное место расположения пьезоэлемента используя информацию о распределении деформаций в конструкции, необходимо рассматривать только распределение величины нормальной компоненты тензора деформаций в направлении оси поляризации пьезоэлемента.

Для этого предлагается использовать некоторую величину, характеризующую вклад от нормальных деформаций в направлении, совпадающем с направлением поляризации пьезоэлемента, в общую величину энергии деформации. В качестве такой величины предлагается использовать интеграл от нормальной деформации в направлении оси поляризации, взятый по части поверхности конструкции, имеющей размеры пьезоэлемента. Если предположить, что пьезоэлемент поляризован в направлении оси  $z$ , тогда наибольший вклад в генерацию электрической энергии будет вносить деформация  $\varepsilon_{zz}$ . Для того чтобы определить оптимальное месторасположение пьезоэлемента, необходимо проанализировать распределение по области предполагаемого размещения пьезоэлемента следующей величины:

$$J = \int_{S_n} \varepsilon_{zz} ds \quad (3.2)$$

где  $S_n$  – площадь пьезоэлемента.

В работе [106] отмечалось, что для достаточно малых размеров пьезоэлемента можно проводить оценку зон его эффективной работы без непосредственного присоединения пьезоэлемента к конструкции, т.е. просто вычисляя интеграл  $J$  от деформаций исходной конструкции в зонах, соответствующих возможному месторасположению пьезоэлемента.

Для демонстрации универсальности и эффективности выбранной методики определения оптимального места расположения пьезоэлемента рассмотрена плоская конструкция в виде консольно-защемленной пластинки, имеющей форму трапеции (рис 3.1). Размеры пластинки: длина – 210 мм, ширина по свободному торцу – 40 мм,

ширина по заземленному торцу – 110 мм, толщина – 0.6 мм. Физико-механические характеристики материала:  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ .

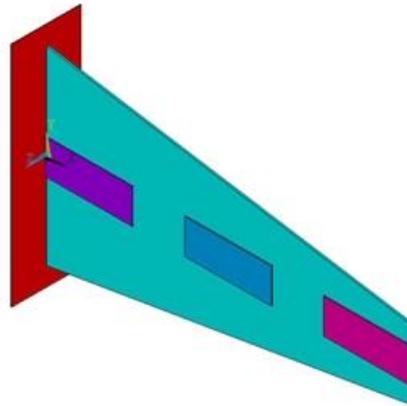


Рисунок 3.1. – Расчетная схема консольно-защемленной пластинки в форме трапеции.

Для расчетов выбран прямоугольный пьезоэлемент, выполненный из пьезокерамики PZT-4, поляризованной в направлении оси  $z$ . Размеры пьезоэлемента – 50x20x0.36 мм. Физико-механические характеристики материала пьезоэлемента (в декартовой системе координат):  $C_{11} = C_{22} = 13.9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $C_{12} = 7.78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $C_{13} = C_{23} = 7.43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $C_{33} = 11.5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $C_{44} = 3.06 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $C_{55} = C_{66} = 2.56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\beta_{31} = \beta_{32} = -5.2 \text{ Кл/м}^2$ ,  $\beta_{33} = 15.1 \text{ Кл/м}^2$ ,  $\beta_{52} = \beta_{61} = 12.7 \text{ Кл/м}^2$ ,  $e_{11} = e_{22} = 6.45 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$ ,  $e_{33} = 5.62 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$ ,  $\rho = 7700 \text{ кг/м}^3$ .

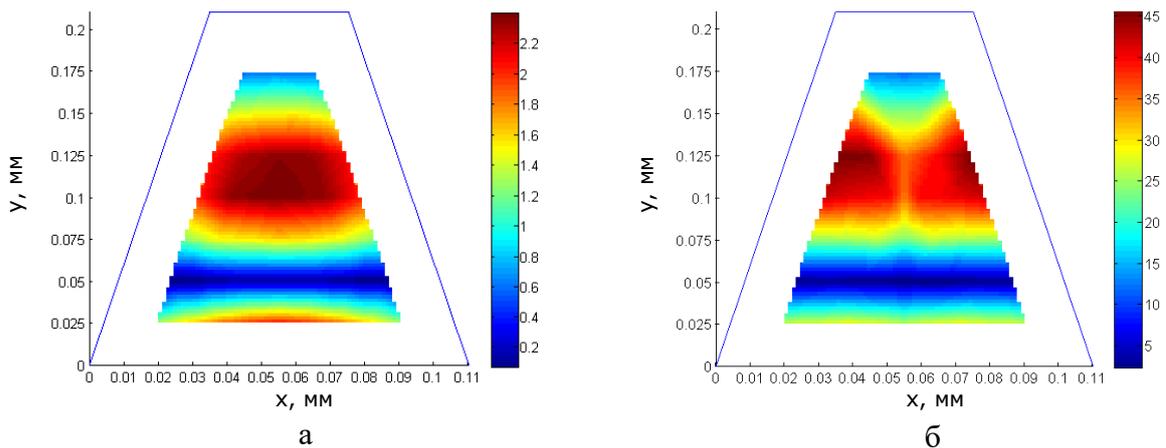


Рисунок 3.2. – Распределение интеграла деформации  $\varepsilon_z$  в зависимости от положения пьезоэлемента при его наличии (а) и при его отсутствии (б).

На рис.3.2 приведены картины распределения величины интеграла  $J$  для второй собственной формы колебаний рассматриваемой пластины. На рис.3.2.a приведено распределение величины интеграла  $J$  в зависимости от положения пьезоэлемента, а на рис.3.2.б приведено аналогичное распределение при его отсутствии. Данный расчет производится для тех же точек возможного размещения пьезоэлемента, что и в случае приведенного на рис.3.2.a распределения, но пьезоэлемент к конструкции не присоединялся.

Из полученных графиков видно, что использование интеграла  $J$  для определения оптимального места расположения пьезоэлемента, действительно, позволяет качественно определить область, в которой он будет демонстрировать наилучшую производительность, однако не позволяет получить количественные оценки. Кроме того, несмотря на то, что в работе [106] отмечалось, что определять оптимальное месторасположение можно и без наличия пьезоэлемента, для получения наиболее достоверной картины, все-таки, рекомендуется проводить расчеты с присоединенным пьезоэлементом.

### **3.2. Подбор компоновки упругих тел пьезоэлементами на основе анализа деформаций на основе анализа распределения значений электрического потенциала**

Ранее в работах [106, 170] было показано, что в качестве характеристики, позволяющей определить оптимальное расположение пьезоэлемента по отношению к конструкции, наиболее удобно использовать относительную величину электрического потенциала, генерируемого на незаземленной поверхности пьезоэлемента при его деформировании. Хотя изучение распределения энергии деформирования на объекте дает довольно точное представление о лучшем месте для размещения пассивного демпфирующего элемента, модальный анализ довольно просто дает выходной электрический потенциал, который генерируется на пьезоэлементе. Естественно, чем больше возникающий электрический потенциал, тем больше энергии преобразуется из механической в электрическую, и, следовательно, тем интенсивнее будет происходить затухание колебаний при присоединении внешней электрической цепи. Размещение пьезоэлементов, выполняющих роль датчиков, в местах, которые не приводят к генерированию значительного электрического потенциала, приводит даже к снижению скорости затухания колебаний.



Оценка эффективности производительности пьезоэлемента по величине генерируемого электрического потенциала для конкретной формы колебаний выглядит весьма простым и привлекательным способом для достижения поставленной цели. При построении алгоритмов численной оптимизации этот подход является наименее затратным с точки зрения необходимых вычислительных ресурсов. Это объясняется тем, что электрический потенциал является компонентой вектора состояния, определяемой непосредственно из решения задачи. Таким образом, оценка производительности пьезоэлемента по величине генерируемого электрического потенциала не требует дополнительных вычислительных процедур.

Однако при использовании задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электроупругих или электровязкоупругих тел для определения оптимального места расположения пьезоэлемента в конструкции, необходимо с осторожностью относиться к полученным результатам, поскольку получаемое из решения задачи значение электрического потенциала не является абсолютной величиной, а определяется с точностью до произвольной постоянной. В общем случае, при численном решении задачи о собственных колебаниях методом конечных элементов, изменение места расположения пьезоэлемента может приводить к существенным изменениям структуры матрицы жесткости. Эти изменения, в свою очередь, будут сказываться на величинах узловых неизвестных в собственных векторах. Проведенные исследования показали, что выбор наилучшего расположения пьезоэлемента для пространственных конструкций не всегда можно делать на основе данных об относительной величине электрического потенциала, полученных на основе решения задачи о собственных колебаниях.

В силу относительного характера его величины, корректные качественные оценки могут быть сделаны только в пределах одного конкретного расчета для понимания степени производительности пьезоэлемента на конкретных формах колебаний. Для того, чтобы иметь возможность сравнивать между собой величину электрического потенциала, полученную в результате решения задачи о собственных колебаниях для различных положений пьезоэлемента, его размеров, физико-механических характеристик материала, необходимо проводить дополнительную валидацию полученных результатов путем сравнения с результатами решения по другим величинам (например, интегралом  $J$  (3.2)). Помимо этого, корректность получаемых результатов можно обеспечить за счет процедуры нормировки компонент собственного вектора относительно величины, относящейся к

определенному узлу. В качестве такого узла может выступать один из узлов, находящихся на электродированной поверхности пьезоэлемента.

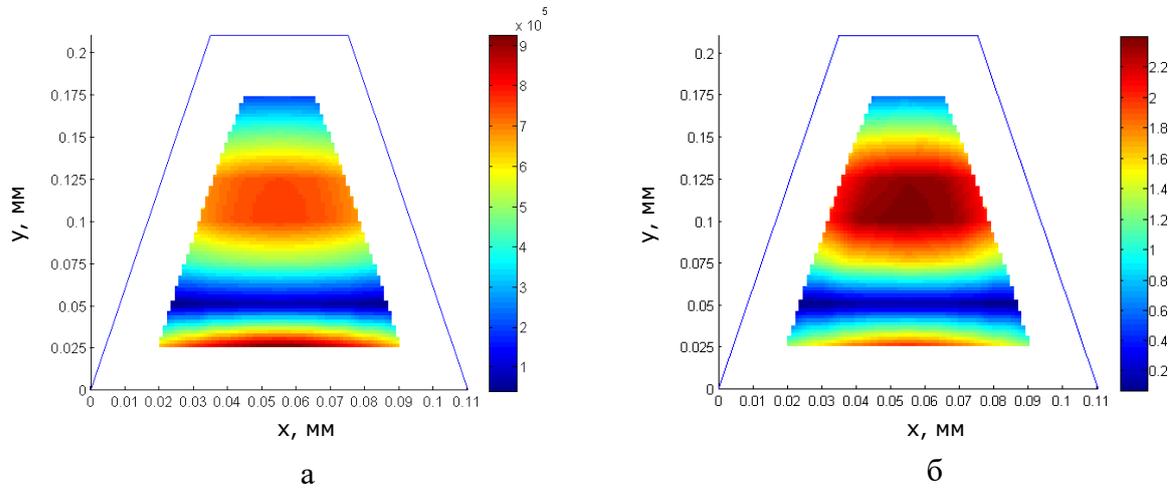


Рисунок 3.3. – Распределение значений величины электрического потенциала  $|\varphi_{nat}^*|$ , генерируемой на электродированной поверхности пьезоэлемента, (а) и интеграла деформации  $\varepsilon_{zz}$  под пьезоэлементом для второй формы собственных колебаний (б)

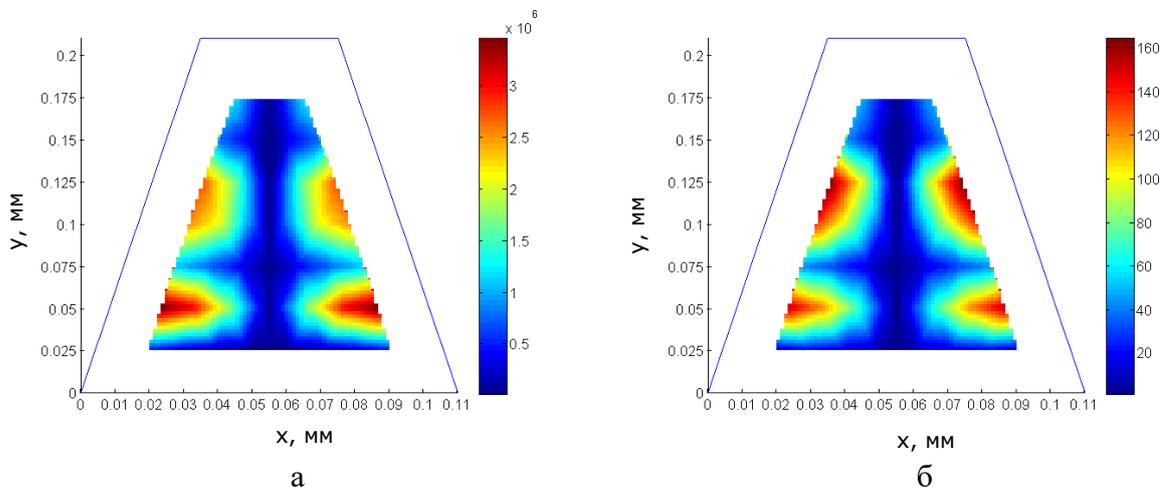


Рисунок 3.4. – Распределение значений величины электрического потенциала  $|\varphi_{nat}^*|$ , генерируемой на электродированной поверхности пьезоэлемента, (а) и интеграла деформации  $\varepsilon_{zz}$  под пьезоэлементом для седьмой формы собственных колебаний (б)

Тем не менее, для демонстрации потенциальных возможностей выбранной методики определения оптимального места расположения пьезоэлемента, а также корректности ее работы в некоторых частных случаях, была рассмотрена аналогичная п.3.1. конструкция в виде консольно-защемленной пластинки в форме трапеции.

На рис.3.3.а, 3.4.а приведены картины распределения относительных величин электрического потенциала  $|\varphi_{nat}^*|$ , генерируемого на второй электродированной поверхности пьезоэлемента (первая электродированная поверхность заземлена) при его деформации в соответствии с формой колебаний, в зависимости от места расположения пьезоэлемента. Для сравнения, на рис. 3.3.б, 3.4.б также приведены картины распределения значений интеграла  $J$  в зависимости от места расположения пьезоэлемента.

Из приведенных на рис. 3.3-3.4 картин распределения видно, что в общем случае для каждой моды колебаний оптимальное месторасположение пьезоэлемента, при котором достигается его наибольшая производительность – свое. Однако в некоторых частных случаях возможны варианты, при которых оптимальное месторасположение пьезоэлемента для демпфирования колебаний на одной частоте может оказаться таковым и для некоторых других частот.

Анализ картин распределения электрического потенциала  $|\varphi_{nat}^*|$  и интеграла  $J$  показывает, что хотя в целом характеры распределения данных величин по поверхности конструкции в зависимости от месторасположения пьезоэлемента совпадают, зоны в которых достигаются максимальные показатели для каждой из величин, различны. Так, например, для второй формы колебаний при определении оптимального места расположения пьезоэлемента по величине интеграла  $J$  зона его оптимального месторасположения будет ограничена по  $x$  – от 0.35 до 0.85 мм, по  $y$  – от 0.075 до 0.15 мм. При этом в случае использования подхода на основе относительных значений электрического потенциала  $|\varphi_{nat}^*|$  зона наилучшего расположения пьезоэлемента будет ограничена координатами от 0.02 до 0.09 мм по  $x$  и от 0.02 до 0.03 мм по  $y$ . Следовательно, при достаточно большом размере пьезоэлемента (когда его размер сопоставим с размером конструкции) данные способы дают различные результаты оптимального места расположения.

### 3.3. Подбор компоновки упругих тел пьезоэлементами на основе анализа распределения значений коэффициента электромеханической связи

Как уже отмечалось, при присоединении пьезоэлемента к конструкции его деформирование, определяемое формой колебаний системы на заданных частотах, зависит от места его расположения, непосредственно определяя его возможности в преобразовании механической энергии в электрическую. В теории пьезоэлектричества для оценки преобразования энергии водится понятие коэффициента электромеханической связи. Данный коэффициент определяется как отношение плотности взаимной энергии к среднему геометрическому значению плотности упругой и электрической энергии [23]. Для изотермических процессов внутренняя энергия линейного пьезоэлектрического тела будет определяться как

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} D_i E_i \quad (3.3)$$

Используя физические соотношения (1.19), можно представить (3.3) как

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \beta_{ijk} E_k \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} E_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{ki} E_i E_k = U_{упр} + 2U_{вэ} + U_{эл} \quad (3.4)$$

где  $U_{упр} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}$  – энергия упругой деформации,  $U_{эл} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ki} E_i E_k$  – энергия электрического поля,  $U_{вэ} = \frac{1}{2} \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} E_k$  – взаимная энергия или энергия, способная к обращению (к преобразованию) [23]. Тогда, согласно определению, коэффициент электромеханической связи будет рассчитываться следующим образом

$$k = \frac{U_{вэ}}{\sqrt{U_{упр} U_{эл}}} \quad (3.5)$$

В случае однородного распределения деформаций по объему тела на основе соотношений (3.4 – 3.5) можно получить простые формулы для определения коэффициента электромеханической связи.

На динамических режимах в общем случае распределение деформаций по объему пьезоэлемента может быть существенно неоднородным. В результате для определения коэффициента электромеханической связи потребуются привлечение методов численного моделирования, позволяющих получить распределение деформаций по объему пьезоэлектрика для различных форм колебаний.

В ряде работ коэффициент электромеханической связи определяется как отношение запасенной в объеме тела электрической (механической) энергии, способной к обращению, ко всей подведенной извне механической (электрической) энергии [171]. Для пояснения смысла понятия «энергии, способной к обращению» необходимо рассмотреть решение задачи о статическом деформировании электроупругого тела под действием приложенных механических нагрузок для двух предельных случаев: короткого замыкания и холостого хода (разомкнутых электродов). Очевидно, что внутренняя энергия тела  $U_{s/c}$  в режиме короткого замыкания будет отличаться от внутренней энергии тела  $U_{o/c}$  при условии разомкнутых электродов. Отсюда энергию, запасенную в объеме тела и способную к обращению, можно определить как разность между  $U_{o/c}$  и  $U_{s/c}$  [23], поскольку путем электрического разряда тело из состояния с разомкнутыми электродами переходит в состояние с короткозамкнутыми электродами. Суммарное значение электрической и механической энергии в объеме тела перед разрядом равно  $U_{o/c}$ . Тогда, в соответствии с энергетическим определением (3.5), коэффициент электромеханической связи будет определяться как [172]

$$k^2 = \frac{U_{o/c} - U_{s/c}}{U_{o/c}} \quad (3.6)$$

Для оценки эффективности возбуждения колебаний пьезоэлектрических тел на резонансных частотах в работах [173-174] вводится понятие динамического коэффициента электромеханической связи, который определяется через частоты резонанса и антирезонанса:

$$k^2 = \frac{f_a^2 - f_p^2}{f_a^2} \quad (3.7)$$

Здесь  $f_p, f_a$  – частоты резонанса и антирезонанса, соответственно. Резонансная частота  $f_p$  соответствует случаю равенства нулю полного электрического импеданса пьезоэлемента. Антирезонансная частота соответствует случаю, когда полный электрический импеданс пьезоэлемента принимает максимальное (бесконечное) значение.

Все описанные выше подходы к определению коэффициента электромеханической связи подразумевают, что пьезоэлемент находится в свободном состоянии, т.е. ни к чему не присоединен. В работе [58] предлагается еще один способ определения динамического коэффициента электромеханической связи, но уже для пьезоэлемента, прикрепленного к конструкции. Поскольку жесткостные свойства конструкции для заданной моды колебаний ограничены значениями, полученными для режимов холостого хода и короткого замыкания, значение резонансной частоты также может изменяться только в пределах от частоты в режиме короткого замыкания  $f_{s/c}$  до частоты в режиме холостого хода  $f_{o/c}$ . Таким образом, коэффициент электромеханической связи может быть определен как:

$$k^2 = \frac{f_{o/c}^2 - f_{s/c}^2}{f_{s/c}^2} \quad (3.8)$$

Как показывает анализ литературы, изменение электрического потенциала в зависимости от положения пьезоэлемента на конструкции тесно связано с изменением коэффициента электромеханической связи  $k$ . Из определения коэффициента электромеханической связи следует, что размещение пьезоэлемента можно считать оптимальным, если коэффициент электромеханической связи в этом положении будет наибольшим.

Эффективность определения оптимального места расположения пьезоэлемента на основе коэффициента электромеханической связи проиллюстрируем на примере плоской конструкции, представляющей собой консольно-защемленную пластину в форме трапеции, к которой присоединен прямоугольный пьезоэлемент размером 50x20x0.36 мм. Размеры конструкции и физико-механические характеристики используемых материалов приведены в п.3.1.

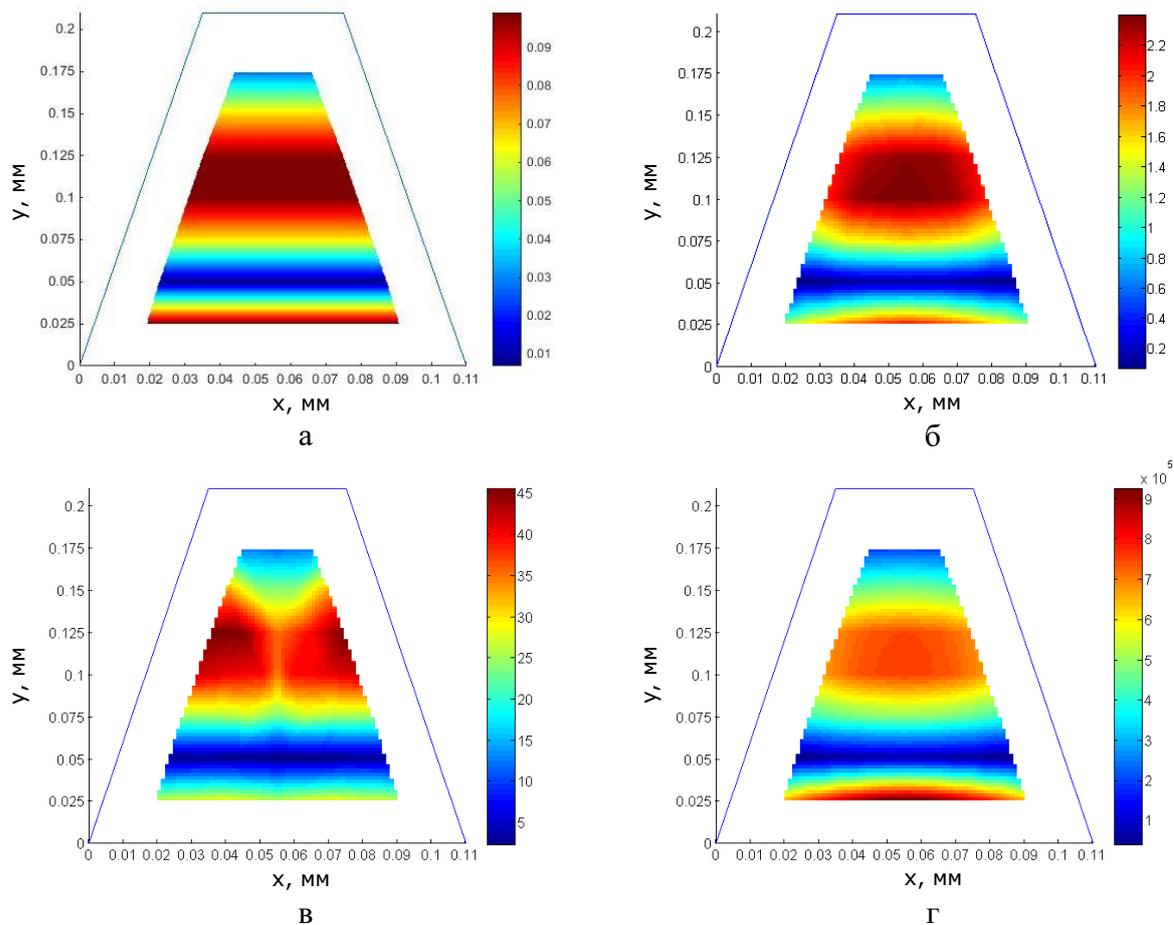


Рисунок 3.5. – Картины распределения различных величин в зависимости от положения пьезоэлемента для второй формы: коэффициента электромеханической связи (а), интеграла  $J$  при наличии пьезоэлемента (б), интеграла  $J$  при отсутствии пьезоэлемента (в) и относительных значений электрического потенциала  $|\varphi_{nat}^*|$  (г).

На рис.3.5.а представлена картина распределения значений коэффициента электромеханической связи в зависимости от места расположения пьезоэлемента для второй собственной формы колебаний рассматриваемой конструкции. Для сравнения на рис. 3.5.б-г приведены картины: распределения значений интеграла  $J$  при наличии пьезоэлемента, значений интеграла  $J$  при отсутствии пьезоэлемента и относительных значений электрического потенциала  $|\varphi_{nat}^*|$ . Из представленных на рис.3.5 результатов видно, что распределение коэффициента электромеханической связи качественно представляет собой некоторую суперпозицию картин распределения, полученных на

основе других критериев. При этом, поскольку коэффициент электромеханической связи может быть определен только на основании частот в режимах холостого хода и короткого замыкания, т.е. интегральных характеристик системы, не зависящих от способа их определения, можно утверждать, что наиболее достоверные результаты могут быть получены при использовании именно этого критерия.

### 3.4. Численные примеры поиска компоновок smart-систем пьезоэлементами

Продемонстрируем поиск компоновок smart-систем пьезоэлементами на примере тонкостенной оболочки в форме полуцилиндра, жестко защемленной по торцам и свободно опертой по образующей (рис. 3.6).

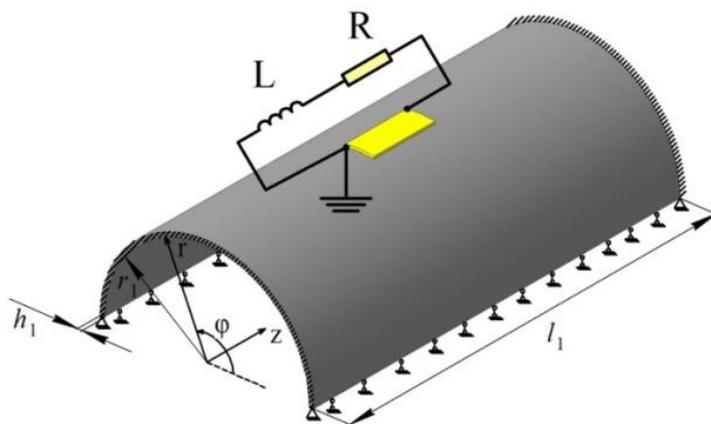


Рисунок 3.6. – Расчетная схема оболочки с пьезоэлементом

Геометрические размеры оболочки:  $r_1 = 76$  мм  $l_1 = 300$  мм,  $h_1 = 0.25$  мм. Оболочка выполнена из упругого изотропного материала со следующими физико-механическими характеристиками:  $E = 1.96 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7700$  кг/м<sup>3</sup>. К поверхности оболочки прикреплен пьезоэлемент с размерами: шириной 20 мм, толщиной 0.36 мм, длиной 50 мм. Пьезоэлемент выполнен из пьезокерамики PZT-4 с поляризацией в направлении оси  $r$  и следующими физико-механическими характеристиками в цилиндрической системе координат:  $C_{11} = C_{22} = 13.9 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{12} = 7.78 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{13} = C_{23} = 7.43 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{33} = 11.5 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{44} = 3.06 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{55} = C_{66} = 2.56 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\beta_{31} = \beta_{32} = -5.2$  Кл/м<sup>2</sup>,



$\beta_{33} = 15.1$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\beta_{52} = \beta_{61} = 12.7$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 6.45 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $\varepsilon_{33} = 5.62 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $\rho = 7500$  кг/м<sup>3</sup>. Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы. (рис.3.6).

При решении задачи методом конечных элементов в пакете прикладных программ ANSYS расчетная модель электромеханической системы состояла из объемных 20-ти узловых элементов в виде параллелепипеда с квадратичной аппроксимацией неизвестных переменных как по компонентам вектора перемещений  $u_i(\bar{x})$ , так и по потенциалу  $\varphi(\bar{x})$ . Количество уравнений в разрешающей системе составило 3809. Степень дискретизации, соответствующая данному количеству уравнений, выбранная на основе анализа асимптотической сходимости получаемых результатов для погрешности не превышающей 1%.

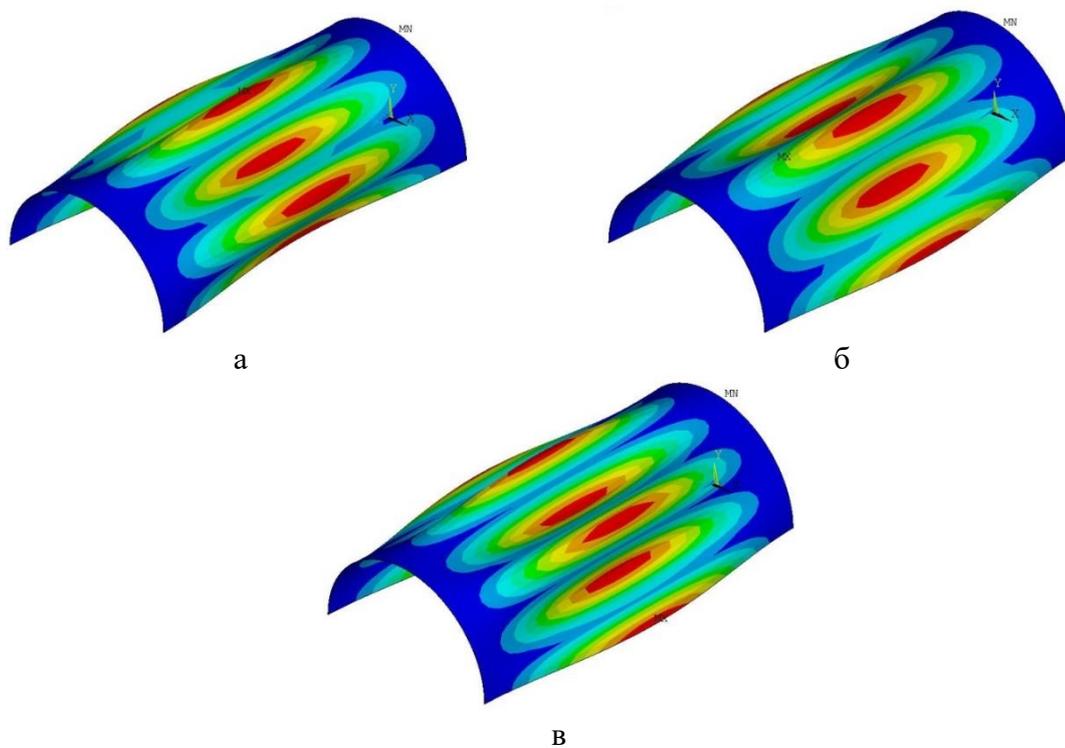


Рисунок 3.7 – Формы колебаний оболочки для первой (а), второй (б) и третьей (в) мод колебаний

Определим оптимальное место расположения пьезоэлемента для первых трех мод колебаний. Значения собственных частот для этих мод составляют 557.4 Гц, 587.7 Гц и 620.2 Гц, соответственно. На рис.3.7 приведены формы колебаний конструкции на рассматриваемых модах. Эффективность работы пьезоэлемента оценивалась на основе трех указанных выше параметров: интеграла  $J$  от деформаций исходной конструкции (3.2),

относительного значения величины электрического потенциала  $|\varphi_{nat}^*|$  и коэффициента электромеханической связи  $k$  (3.8).

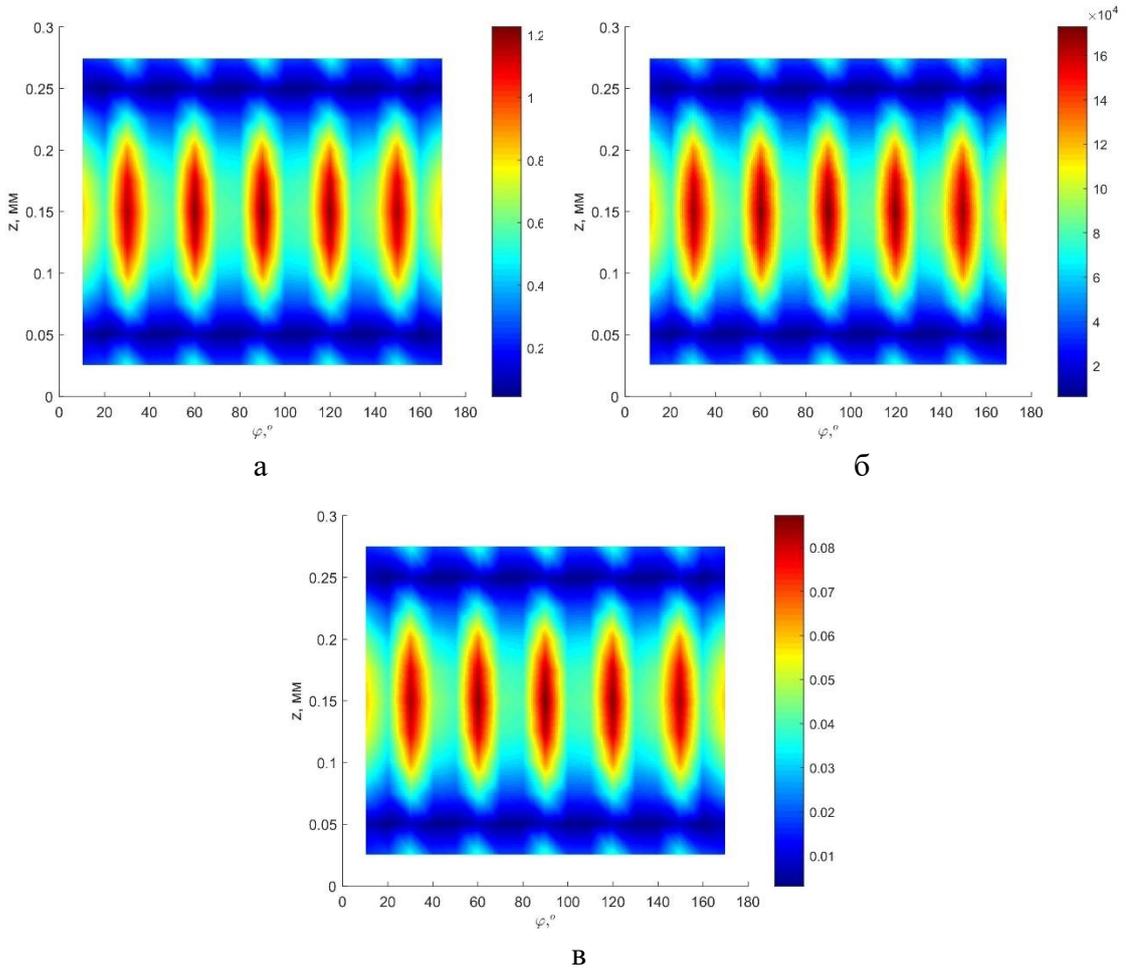
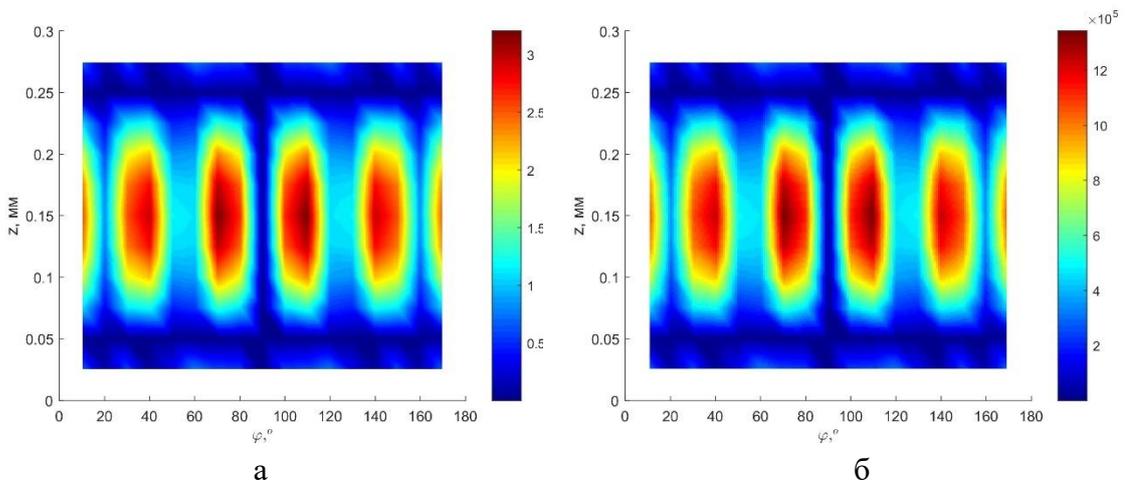
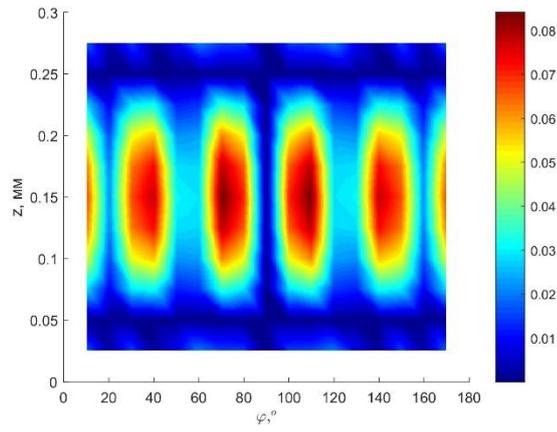


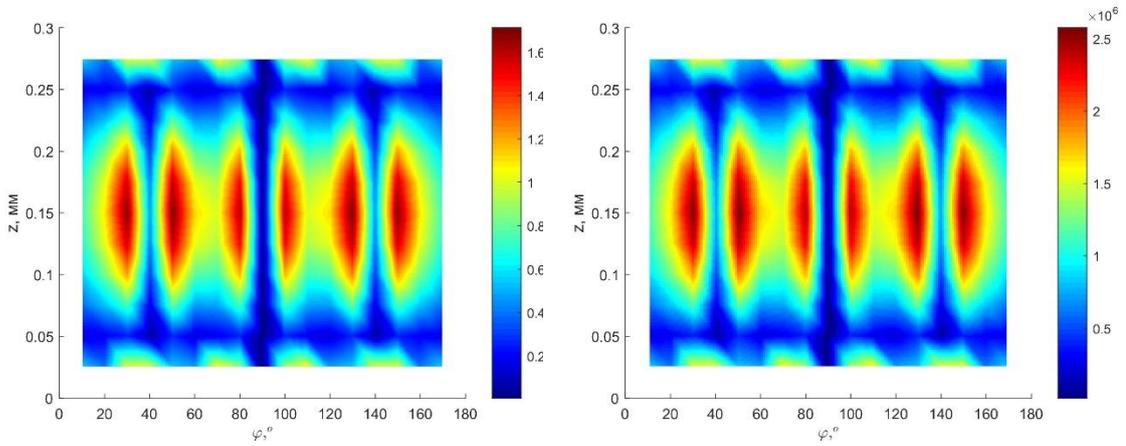
Рисунок 3.8 – Картины распределения параметров  $J$  (а),  $|\varphi_{nat}^*|$  (б) и  $k$  (в) для первой моды колебаний.





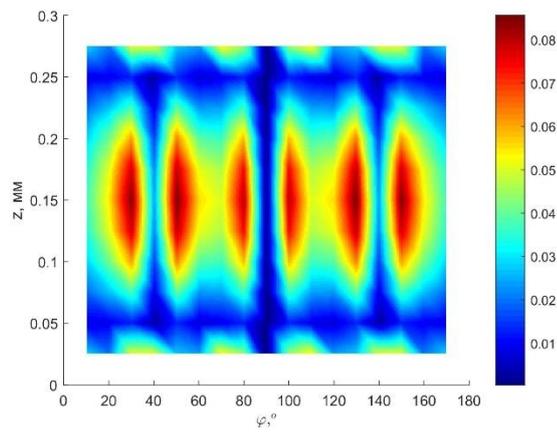
В

Рисунок 3.9 – Картины распределения параметров  $J$  (а),  $|\varphi_{nat}^*|$  (б) и  $k$  (в) для второй моды колебаний.



а

б



В

Рисунок 3.10 – Картины распределения параметров  $J$  (а),  $|\varphi_{nat}^*|$  (б) и  $k$  (в) для третьей моды колебаний.

Из результатов, представленных на рис.3.8-3.10 видно, что для рассматриваемых мод колебаний параметры оптимального места расположения, определяемые на основе трех указанных выше параметров, совпадают. Найденные параметры оптимальных мест расположения пьезоэлемента для трех выбранных мод приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Параметры оптимального месторасположения пьезоэлемента

№ моды	Координата $\varphi$ центра масс	Координата $z$ центра масс
1	90	150
2	70	150
3	50	150

Однако, исходя из особенностей численного определения каждой из используемых величин, можно резюмировать, что наиболее достоверные результаты следуют из анализа картин распределения значений коэффициента электромеханической связи, поскольку его значение определяется на основе абсолютных значений собственных частот колебаний, в то время как остальные параметры определяются на основе относительных значений, полученных из собственных векторов. При этом стоит отметить, что при относительно малых размерах пьезоэлементов выбор оптимальных вариантов их размещения может проводиться как на основе анализа интегральной характеристики (3.2), так и на основе относительных значений электрического потенциала, получаемых из решения задачи о собственных колебаниях упругой конструкции с пьезоэлементом. Результаты расчетов, приведенные выше, показали эквивалентность результатов, получаемых в соответствии с данными подходами при описанных выше условиях. В этом случае для каждой частоты анализируется одна форма колебаний.

## Глава 4. Численный анализ и выбор оптимальных свойств smart-систем на основе пьезоэлементов и электрических элементов.

Количественным показателем демпфирования колебаний или диссипативных свойств механических систем при свободных колебаниях является скорость затухания, которая на соответствующей моде характеризуется логарифмическим декрементом. При вынужденных колебаниях величина диссипативных свойств может быть оценена по величине амплитудных значений перемещений, деформаций или напряжений на резонансных режимах. В настоящей главе приводятся приложения задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях для оценки диссипативных свойств smart-систем на основе пьезоэлементов и электрических элементов и выбора параметров элементов электрических цепей, обеспечивающих максимальное демпфирование колебаний.

### 4.1. Выбор параметров элементов внешних электрических цепей, обеспечивающих максимальное демпфирование колебаний на заданной моде, на основе анализа собственных колебаний электроупругих smart-систем

В качестве вариантов внешних электрических цепей рассмотрены наиболее распространенные схемы: резистивная цепь, состоящая из одного резистивного элемента, и резонансная электрическая цепь, состоящая из последовательно или параллельно соединенных резистивного и индуктивного элементов (рис. 4.1).

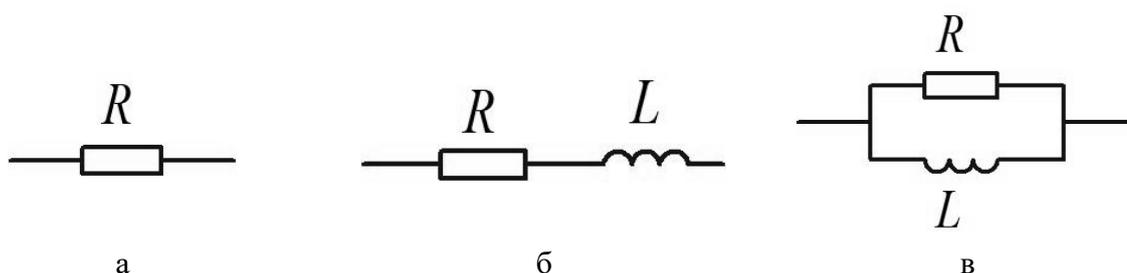


Рисунок 4.1. – Внешние электрические цепи, используемые для демонстрации возможностей разработанных алгоритмов: а) резистивная  $R$ -цепь; б) последовательная резонансная  $RL$ -цепь; в) параллельная резонансная  $RL$ -цепь

Появление в системе одного резистора эквивалентно появлению дополнительной вязкости. В работе [58] было показано, что присоединение к упругой конструкции с пьезоэлементом резистивной внешней цепи, аналогично замене упругого материала конструкции на вязкоупругий. Наличие в системе резонансной электрической цепи приводит к появлению дополнительной частоты в спектре собственных частот колебаний. При демпфировании колебаний это открывает возможность реализации взаимодействия двух мод колебаний.

В качестве объектов исследования выбраны консольно-защемленная упругая пластинка и тонкостенная оболочка в форме полуцилиндра, жестко защемленная по торцам и свободно опертая по образующим (рис.4.2). Выбор этих примеров обусловлен демонстрацией вариантов с достаточно редким и достаточно плотным частотными спектрами.

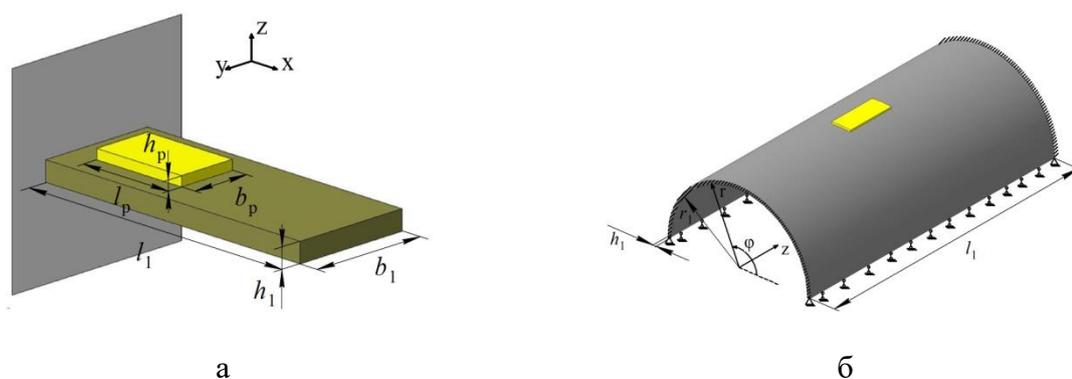


Рисунок 4.2. – Расчетные схемы конструкций: пластинка (а), оболочка (б).

Пластинка с размерами  $l_1 = 210$  мм,  $b_1 = 26$  мм,  $h_1 = 0.5$  мм. выполнена из материала с физико-механическими характеристиками  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Пьезоэлемент выполнен в форме прямоугольника с размерами  $l_p = 50$  мм,  $b_p = 20$  мм,  $h_p = 0.36$  мм и расположен в 12 мм от закрепленного края пластинки симметрично относительно её оси. В качестве материала пьезоэлемента выбрана пьезокерамика PZT-4 с поляризацией в направлении оси  $z$  и следующими физико-механическими характеристиками:  $C_{11} = C_{22} = 13.9 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{12} = 7.78 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{13} = C_{23} = 7.43 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{33} = 11.5 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{44} = 3.06 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{55} = C_{66} = 2.56 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\beta_{31} = \beta_{32} = -5.2$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\beta_{33} = 15.1$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\beta_{52} = \beta_{61} = 12.7$  Кл/м<sup>2</sup>,  $e_{11} = e_{22} = 6.45 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $e_{33} = 5.62 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,

$\rho = 7700 \text{ кг/м}^3$ . Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы.

Оболочка имеет размеры:  $r_2 = 76 \text{ мм}$ ,  $l_2 = 300 \text{ мм}$ ,  $h_2 = 0.25 \text{ мм}$  и выполнена из упругого изотропного материала со следующими физико-механическими характеристиками:  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ . К поверхности оболочки прикреплен пьезоэлемент шириной 20 мм, толщиной 0.36 мм, длиной 50 мм. Пьезоэлемент, расположенный так, чтобы его центр масс находился на расстоянии 15 мм от заземленных торцов и был смещен на  $90^\circ$  по угловой координате от свободно опертых образующих, выполнен из пьезокерамики PZT-4 с аналогичными физико-механическими характеристиками, записанными в цилиндрической системе координат. Направление поляризации совпадает с направлением оси  $r$ . Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы.

В качестве первого примера внешней электрической цепи рассмотрена резистивная цепь, состоящая только из элемента сопротивления ( $R$ ) (рис.4.1.а). На рис.4.3. приведены графики зависимости действительной и мнимой частей комплексной собственной частоты, соответствующей первой моде колебаний пластины, при изменении значения сопротивления внешней цепи.  $\omega_{Re}$

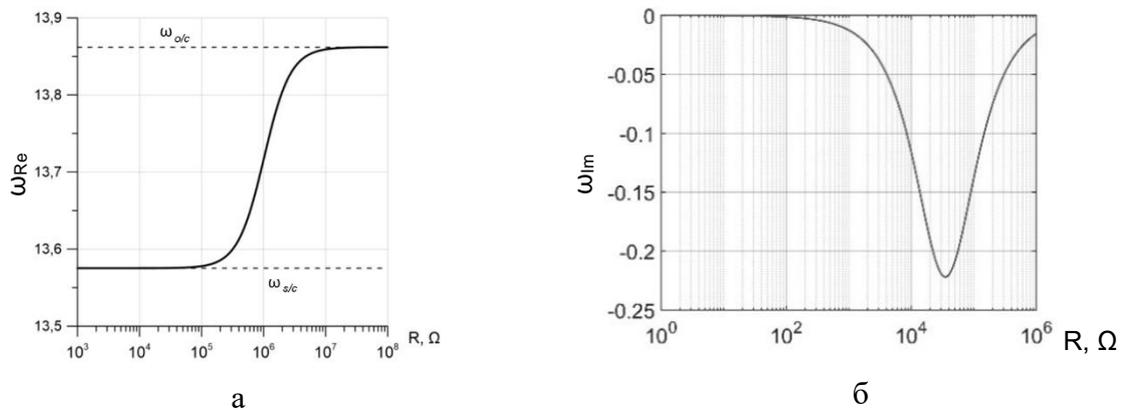


Рисунок 4.3. – Влияние значения сопротивления резистивной внешней цепи на действительную (а) и мнимую часть (б) комплексной собственной частоты колебаний.

Приведенные на рис.4.3 зависимости демонстрируют, что мнимая часть комплексной собственной частоты имеет четко выраженный экстремум, соответствующий максимальной скорости затухания свободных колебаний. При этом важно отметить, что значение действительной части комплексной собственной частоты изменяется от

собственной частоты при замкнутых электродах пьезоэлемента ( $\omega_{s/c}$ ) до собственной частоты колебаний при разомкнутых электродах пьезоэлемента ( $\omega_{o/c}$ ). Эти частоты определяют предельные режимы работы пьезоэлемента.

Далее, в качестве внешней электрической цепи рассмотрена последовательная резонансная  $RL$ -цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления ( $R$ ) и индуктивности ( $L$ ). Пьезоэлемент как объект в силу своей природы проявляет ёмкостные свойства и вместе с резонансной цепью образует последовательный  $RLC$ -колебательный контур, что приводит к появлению в спектре частот колебаний исходной конструкции дополнительной собственной частоты, обусловленной взаимодействием катушки индуктивности (или гиратора) и собственной емкости пьезоэлемента. В результате формируется спектр собственных частот колебаний системы из частот колебаний конструкции с пьезоэлементом и частоты внешней электрической цепи, в котором одна из собственных частот может изменяться в достаточно широком диапазоне за счет варьирования параметров внешней цепи.

Применение внешней электрической  $RL$ -цепи для демпфирования колебаний конструкции на заданной частоте производится путем «настройки» встраиваемой в исходный спектр собственных частот колебаний дополнительной частоты колебаний электрического контура. «Настройка» производится изменением величины параметров внешней электрической цепи, которые вызывают сдвиг этой дополнительной частоты, приближая ее к собственной частоте колебаний smart-конструкции, вплоть до их совпадения.

Поскольку у комплексной собственной частоты колебаний в соответствии с математической постановкой задачи действительная часть характеризует частоту колебаний, то одним из условий для подбора параметров шунтирующей цепи может являться условие вида

$$\omega_R^n = \omega_R^e \quad (4.1)$$

Однако это условие не определяет однозначно параметры внешней электрической цепи, обеспечивающие наилучшее демпфирование заданной моды колебаний конструкции. Проведенные численные исследования показали, что в пространстве параметров  $RL$  существует множество точек, соответствующих различным значениям сопротивления и индуктивности, при которых выполняется условие (4.1).

На рисунке 4.4 для рассматриваемых конструкций с пьезоэлементом,



шунтированным последовательной резонансной  $RL$ -цепью, представлены зависимости действительной части собственной частоты колебаний конструкций с шунтированным пьезоэлементом, соответствующие первой моде, и частоты колебаний электрического колебательного контура в области параметров  $R$  и  $L$  (рис.4.4 а, в) и проекции линий их совпадения в области параметров  $R$  и  $L$  (рис.4.4 б, г). Из приведенных на рис.4.4 графиков видно, что условие (4.1) не позволяет однозначно определить оптимальные параметры шунтирующей цепи, поскольку совпадение частот наблюдается во множестве точек.

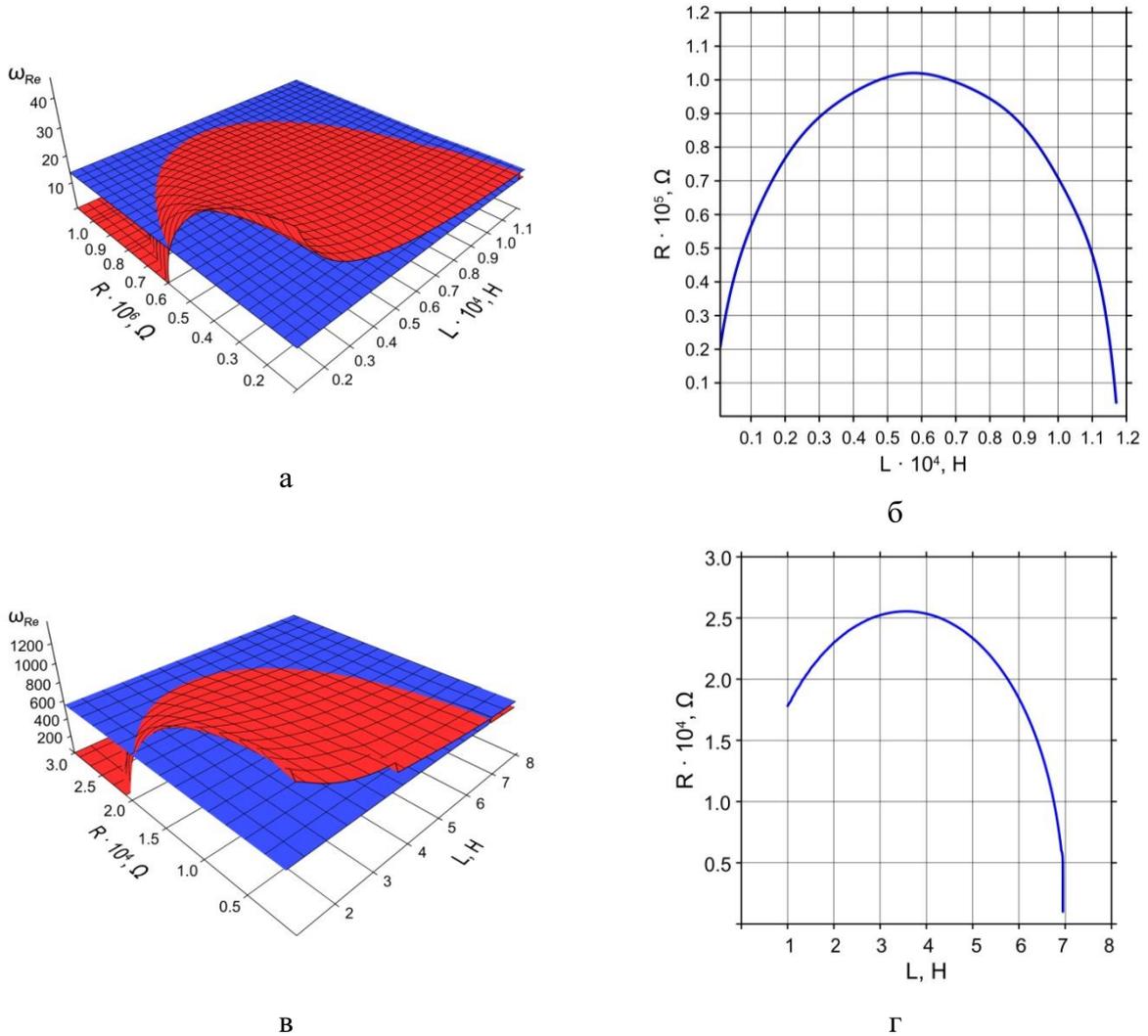


Рисунок 4.4. – Зависимости действительной части первой комплексной собственной частоты колебаний (синяя) и частоты колебаний электрического контура (красная) для пластинки (а) и оболочки (в) и проекции линии их совпадения для пластинки (б) и оболочки (г).

Решение задачи о собственных колебаниях конструкции с пьезоэлементом и

внешней электрической цепью позволяет получить мнимую часть комплексной собственной частоты  $\omega_{lm}^n$ , которая является количественным показателем скорости затухания колебаний. На рис.4.5 приведены поверхности зависимости показателя демпфирования  $\omega_{lm}^n$  для комплексной собственной частоты, соответствующий первой моде колебаний конструкции, в зависимости от значений параметров  $R$  и  $L$  внешней цепи (обозначены цветной градиентной заливкой). Эти результаты демонстрируют, что поверхности мнимых частей, характеризующих моды колебаний, относящиеся к конструкции, имеют ярко выраженные глобальные экстремумы. Следует отметить, что в точках экстремумов также наблюдается совпадение мнимых частей комплексных собственных частот колебательного контура и конструкции (рис.4.4). При этом, значения  $R$  и  $L$ , соответствующие этому экстремуму, также соответствуют одной из точек, лежащих на кривой совпадения частот демпфируемой моды и дополнительной моды колебаний электрической цепи. Проведенные исследования показали, что на всем пространстве возможных значений параметров  $R$  и  $L$  такие экстремумы существуют для всех мод колебаний, кроме дополнительной моды электрического колебательного контура.

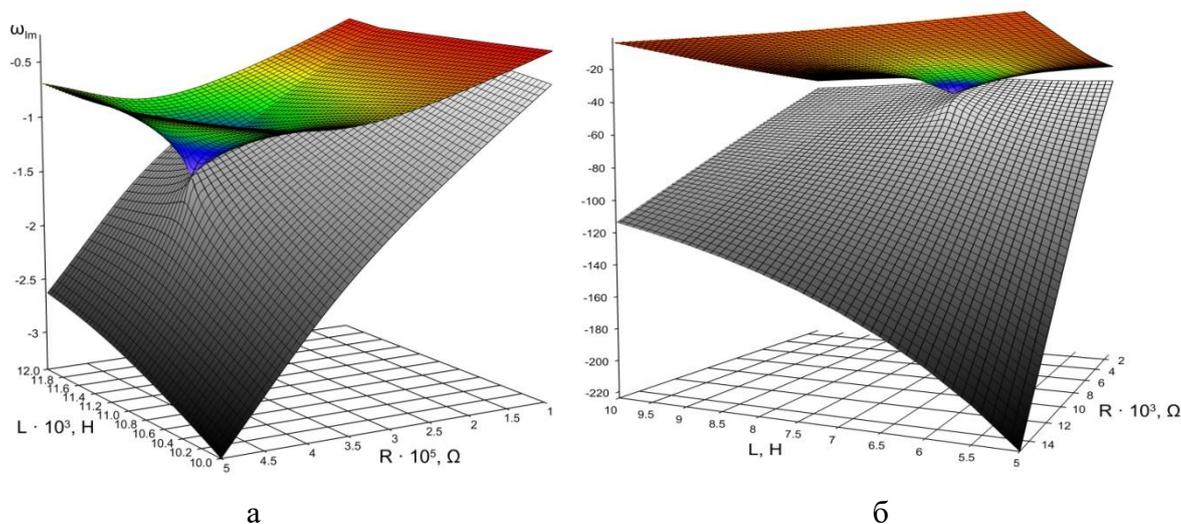


Рисунок 4.5. – Зависимости мнимой части комплексных собственных частот первой моды колебаний (цветная градиентная заливка) и моды колебаний электрического контура (серая заливка) для пластинки (а) и оболочки (б).

Приведенные численные результаты демонстрируют наличие условия, однозначно определяющего максимальное демпфирование соответствующей моды при свободных

колебаниях smart-системы на основе пьезоэлементов, к электродированным поверхностям которых присоединены электрические цепи, генерирующие дополнительную частоту в спектре собственных частот колебаний:

$$|\omega_{lm}^n| \rightarrow \max \quad (4.2)$$

Значение комплексной собственной частоты колебаний является функцией параметров smart-системы, в том числе, значений параметров элементов электрической цепи, и поиск ее экстремальных значений является классической задачей нелинейного математического программирования. При этом, условие (4.1) может быть использовано как дополнительное, при построении алгоритмов поиска параметров smart-систем, обеспечивающих максимальное демпфирование соответствующей моды колебаний.

В предыдущей главе было показано, что при заданном расположении пьезоэлемента на конструкции возможны ситуации, когда при колебаниях объекта на исследуемой частоте пьезоэлемент либо не деформируется, либо его деформация симметричная, что приводит к отсутствию потенциала на его электродированной поверхности. Таким образом, при таком расположении пьезоэлемента будет невозможно осуществить демпфирование колебаний на данных частотах, поэтому далее их приводить не будем, оставляя только те частоты, на которых пьезоэлемент генерирует суммарный ненулевой электрический потенциал на незаземленной электродированной поверхности.

В таблице 4.1 приведены значения собственных частот колебаний пластинки с пьезоэлементом (рис.4.2.а) на режимах короткого замыкания (short circuit - s/c) и холостого хода (open circuit - o/c). В качестве демпфируемых частот были выбраны первая и пятая собственные частоты для того, чтобы показать, что с помощью шунтированного пьезоэлемента можно эффективно демпфировать колебания в широком частотном диапазоне.

Таблица 4.1. Собственные частоты колебаний пластинки с пьезоэлементом.

№ моды	Частота в режиме s/c, Гц	Частота в режиме o/c, Гц
1	13.56	13.86
2	72.15	72.33
3	197.90	198.32
4	399.79	404.15
5	665.45	674.96

На рис. 4.6 приведены поверхности зависимости мнимой части комплексной собственной частоты пластины в случае использования последовательной (рис. 4.6.а) и параллельной (рис. 4.6.б) цепей. На основе анализа поведения мнимых частей в зависимости от значений параметров внешних цепей, согласно критерию (4.2), были определены значения параметров, обеспечивающих максимальные демпфирующие характеристики для первой и пятой собственных частот конструкции с присоединенным пьезоэлементом в случае последовательной и параллельной  $RL$ -цепей. Результаты расчетов приведены в таблице 4.2.

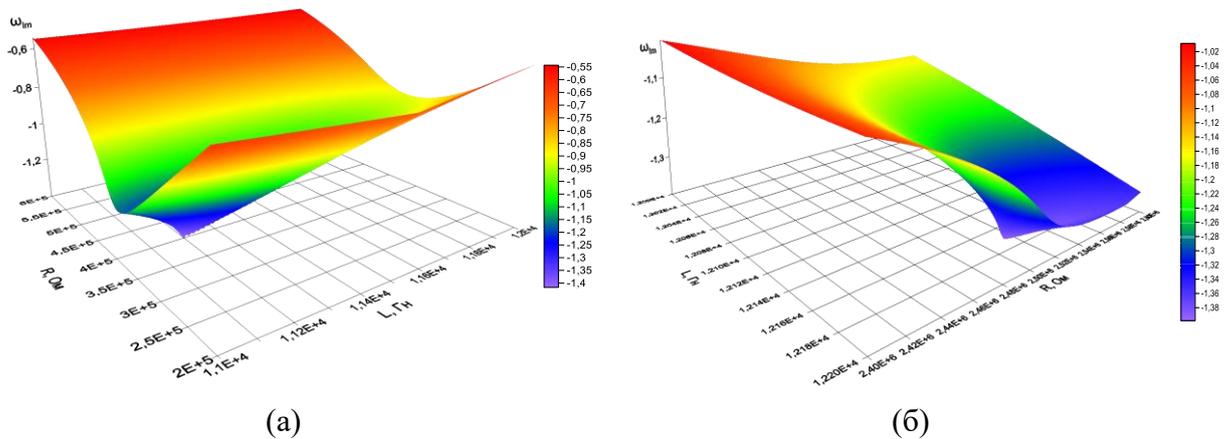


Рисунок 4.6. – Зависимости мнимой части  $\omega_{im}^1$  комплексной собственной частоты колебаний первой моды  $\omega^1 = \omega_{Re}^1 + i\omega_{im}^1$  для пластины в случае последовательной (а) и параллельной (б)  $RL$ -цепей.

Таблица 4.2. Собственные частоты колебаний пластинки.

Пластинка с пьезоэлементом без цепи		Последовательная цепь		Параллельная цепь	
s/c, Гц	o/c, Гц	Оптимальные параметры цепи	Собственная частота	Оптимальные параметры цепи	Собственная частота
13.56	13.86	$L_{ser}^1 = 11200 \text{ Гн}$ $R_{ser}^1 = 401 \text{ кОм}$	$13.64 - 1.42i$	$L_{par}^1 = 12172 \text{ Гн}$ $R_{par}^1 = 2515 \text{ кОм}$	$13.43 - 1.40i$
665.45	674.96	$L_{ser}^5 = 5.1 \text{ Гн}$ $R_{ser}^5 = 7.2 \text{ кОм}$	$687.68 - 52.16i$	$L_{par}^5 = 5.4 \text{ Гн}$ $R_{par}^5 = 66.1 \text{ кОм}$	$673.41 - 54.34i$

Из полученных результатов видно, что при практически одинаковой степени демпфирования колебаний (значения мнимых частей  $\omega_{lm}^{1ser}$  и  $\omega_{lm}^{1par}$  различаются примерно на 1%, а разница в значениях мнимых частей  $\omega_{lm}^{5ser}$  и  $\omega_{lm}^{5par}$  составляет около 4%) значения оптимальных параметров для последовательной цепи ниже, чем для параллельной, что делает ее более предпочтительной при практической реализации, особенно, на низких частотах.

В таблице 4.3 приведены значения собственных частот колебаний оболочки с пьезоэлементом (рис.4.2.б) на режимах короткого замыкания (s/c) и холостого хода (o/c), соответствующие первой и пятой модам колебаний, на которых возможно осуществить демпфирование при данном положении пьезоэлемента.

Таблица 4.3. Собственные частоты колебаний оболочки с пьезоэлементом.

№ моды	Частота в режиме s/c, Гц	Частота в режиме o/c, Гц
1	554.25	557.41
2	755.77	759.57
3	800.13	803.79
4	1287.62	1293.42
5	1471.64	1482.21

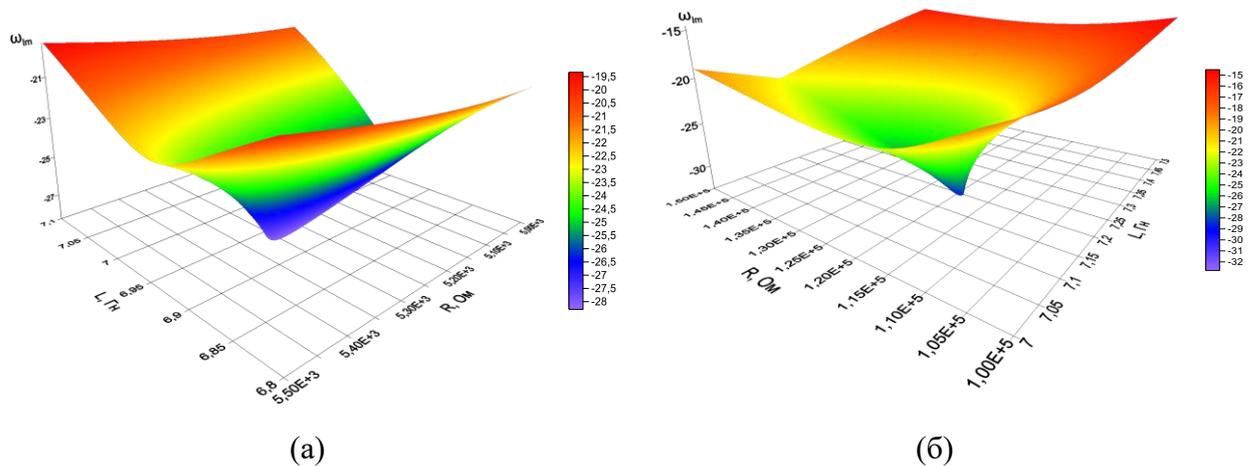


Рисунок 4.7. – Зависимости мнимой части  $\omega_{lm}^1$  комплексной собственной частоты первой моды колебаний оболочки  $\omega^1 = \omega_{Re}^1 + i\omega_{Im}^1$  в случае последовательной (а) и параллельной (б)  $RL$ -цепей

На рисунке 4.7 приведены поверхности зависимостей мнимой части комплексной собственной частоты первой моды колебаний конструкции в пространстве параметров  $RL$  в случае последовательной (рис.4.7.а) и параллельной (рис.4.7.б) цепей. На данных рисунках видно, что, как и в случае с пластинкой, обе поверхности (для последовательной и параллельной цепи) также имеют ярко выраженные экстремумы.

В результате расчетов были определены значения параметров, обеспечивающих максимальные демпфирующие характеристики для первой и пятой мод колебаний оболочки с присоединенным пьезоэлементом в случае последовательной и параллельной  $RL$ -цепей. Результаты расчетов приведены в таблице 4.4.

Полученные результаты демонстрируют, что параллельная цепь обеспечивает большую степень демпфирования (примерно на 14-15%), нежели последовательная, однако, как и в случае с пластинкой, оптимальные параметры сопротивления и индуктивности, необходимые для демпфирования заданной частоты, имеют на низких частотах более высокие значения в сравнении с последовательной цепью. При этом разница между оптимальными параметрами последовательной и параллельной цепей с ростом частоты уменьшается, делая параллельную цепь предпочтительней на высоких частотах.

Таблица 4.4. Собственные частоты колебаний оболочки.

Оболочка с пьезоэлементом без цепи		Последовательная цепь		Параллельная цепь	
s/c, Гц	o/c, Гц	Оптимальные параметры цепи	Собственная частота	Оптимальные параметры цепи	Собственная частота
554.25	557.41	$L_{ser}^1 = 6.93 \text{ Гн}$ $R_{ser}^1 = 5.30 \text{ кОм}$	$553.60 - 28.30i$	$L_{par}^1 = 7.12 \text{ Гн}$ $R_{par}^1 = 110.3 \text{ кОм}$	$554.70 - 32.78i$
1471.64	1482.21	$L_{ser}^5 = 1.04 \text{ Гн}$ $R_{ser}^5 = 2.57 \text{ кОм}$	$1493.29 - 83.48i$	$L_{par}^5 = 1.08 \text{ Гн}$ $R_{par}^5 = 37.86 \text{ кОм}$	$1453.23 - 74.40i$

Таким образом, на примере решения задачи о собственных колебаниях плоской и пространственной конструкций были продемонстрированы предположения, приведенные в работе [69] при исследовании балки, что последовательную цепь более целесообразно использовать для подавления колебаний на низких частотах, в то время как параллельная

цепь больше подходит для демпфирования высоких частот, и что параллельная цепь является менее чувствительной к точности подбора параметров.

Практически во всех известных работах, в том числе в наиболее цитируемых работах [58, 69, 114, 139, 151], параметры внешних электрических цепей, обеспечивающих максимальное демпфирование соответствующих мод колебаний, определяются на основе различных передаточных функций. В настоящей работе приводятся результаты численных исследований, позволяющие сравнить показатели демпфирования при значениях параметров цепей, найденных на основе известных передаточных функций и на основе предлагаемых алгоритмов решения задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях рассматриваемых smart-систем. Для сравнения выбрана передаточная функция, представленная в работе [58], так как она наиболее часто встречается в различных приложениях, что отражается в работе [139]. Передаточная функция, представленная в [58] дает выражения для значений сопротивления и индуктивности последовательной  $RL$ -цепи, обеспечивающие максимальное демпфирование для этой передаточной функции:

$$L_{opt}^j = \frac{1}{C_j (\omega_{s/c}^j)^2 (1 + K_j^2)^2}; \quad R_{opt}^j = \frac{2K_j}{C_j (\omega_{s/c}^j) \sqrt{(1 + K_j^2)^3}} \quad (4.3)$$

здесь  $C_j$  – внутренняя емкость пьезоэлемента, соответствующая его емкости во время  $j$ -го резонанса  $C_j = C_0(1 - K_j^2)$ ;  $C_0$  – статическая емкость пьезоэлемента;  $K_j$  – коэффициент электромеханической связи для  $j$ -й моды колебаний, определяемы согласно (3.8);  $R_{opt}^j$  и  $L_{opt}^j$  – оптимальные сопротивление и индуктивность шунтирующей цепи для демпфирования  $j$ -й моды колебаний, соответственно;  $\omega_{o/c}^j, \omega_{s/c}^j$  –  $j$ -е собственные частоты колебаний конструкции с пьезоэлементом в режиме холостого хода (open circuit - o/c) и при коротком замыкании (short circuit- s/c).

Таблица 4.5. Значения собственных частот колебаний и соответствующих значений

$R$  и  $L$  для пластины

Номер моды колебаний	$\omega_{s/c}$	$\omega_{o/c}$	Результаты на основе передаточной функции				Результаты на основе расчета собственных частот колебаний			
			$L$ (Гн)	$R$ (кОм)	$\omega_{Re}$	$\omega_{Im}$	$L$ (Гн)	$R$ (кОм)	$\omega_{Re}$	$\omega_{Im}$
1	13.58	13.86	11212	403.9	13.86	1.33	11197	403.0	13.82	1.39
2	72.15	72.33	420	26.8	71.56	1.67	428.7	27.9	72.43	2.55

Таблица 4.6. Значения собственных частот колебаний и соответствующих значений  $R$  и  $L$  для оболочки

Номер моды колебаний	$\omega_{s/c}$	$\omega_{o/c}$	Результаты на основе передаточной функции				Результаты на основе расчета собственных частот колебаний			
			$L$ (Гн)	$R$ (кОм)	$\omega_{Re}$	$\omega_{Im}$	$L$ (Гн)	$R$ (кОм)	$\omega_{Re}$	$\omega_{Im}$
1	554.25	557.41	7.12	5.34	564.33	18.94	6.90	5.16	564.24	29.91
2	585.76	583.33	6.45	4.34	595.19	12.88	6.24	4.87	590.52	18.55
3	627.44	624.01	5.63	4.65	636.82	19.73	5.51	4.92	632.22	23.27
4	755.77	759.57	4.00	3.68	771.91	9.76	3.70	3.96	776.59	17.86

В таблицах 4.5 и 4.6 для пластинки и оболочки приведены значения сопротивлений и индуктивностей, найденных на основе передаточной функции, которая приводит к соотношениям (4.3). Помимо этого, в таблице также приведены значения параметров цепи, найденных на основе выполнения соотношения (4.2). При сопоставлении результатов решения задачи о собственных колебаниях, в этой же таблице приведены значения действительных и мнимых составляющих комплексных собственных частот колебаний, вычисленных при параметрах, соответствующих условию (4.2), и найденных по соотношениям (4.3).

Решение задачи о собственных колебаниях имеет вид:

$$u_i(x, t) = \xi_i(x) \cdot e^{i\omega t} = \xi_i(x) \cdot e^{-\omega_{Im} t} (\cos(\omega_{Re} t) + i \sin(\omega_{Re} t))$$

Графической иллюстрацией сопоставления результатов, полученных при использовании передаточной функции и результатов решения задачи о собственных колебаниях являются зависимости  $e^{-\omega_{Im} t} \cos(\omega_{Re} t)$ , представленные для пластины и оболочки на рис.4.8 и 4.9. Синим цветом на рисунках обозначены кривые для параметров, подобранных на основе решения задачи о собственных колебаниях, красным – на основе соотношений (4.3).

Приведенные численные и графические результаты демонстрируют, что параметры электрических цепей, найденные на основе решения задачи о собственных колебаниях, обеспечивают более высокие показатели демпфирования, чем параметры цепей, найденные на основе передаточных функций. Синим цветом на графиках обозначены зависимости для параметров цепи, найденных на основе формул (4.3), красным – для параметров, найденных на основе решения задачи о собственных колебаниях.



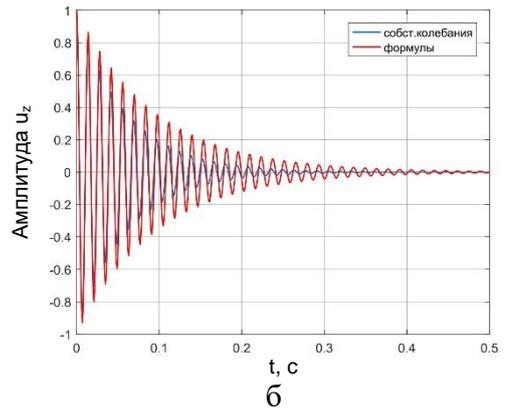
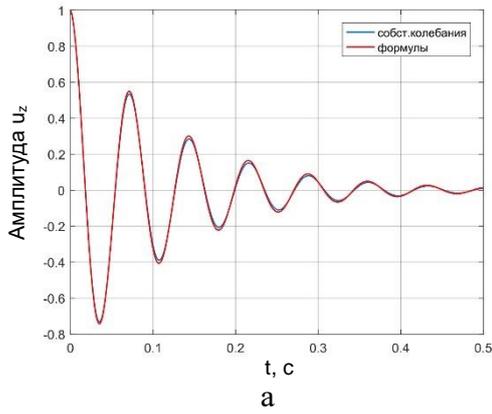


Рисунок 4.8. – Временные зависимости собственных затухающих колебаний первой (а) и второй (б) мод колебаний пластинки

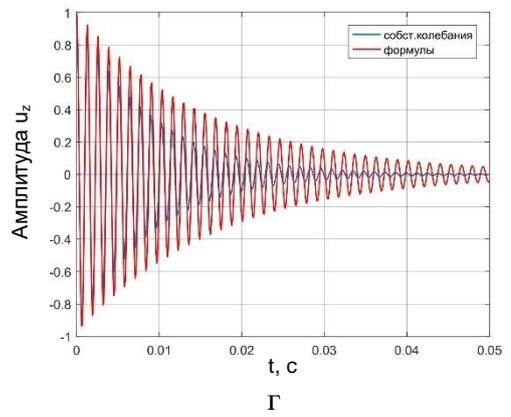
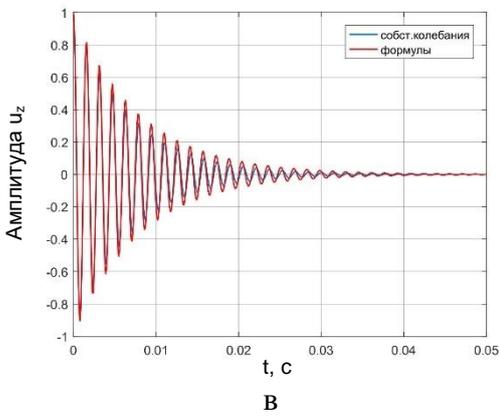
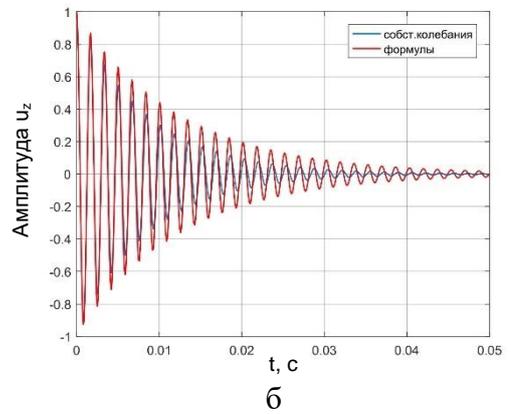
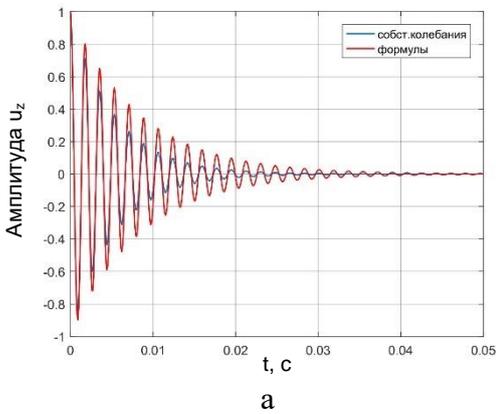


Рисунок 4.9. – Временные зависимости собственных затухающих колебаний первой (а), второй (б), третьей (в) и четвертой (г) мод колебаний оболочки

## 4.2. Выбор параметров внешних электрических цепей, обеспечивающих максимальное демпфирование при вынужденных колебаниях

При вынужденных установившихся колебаниях параметры демпфирования колебаний механической системы определяются амплитудными значениями перемещений, деформаций или напряжений при резонансных режимах. Для резистивной внешней электрической цепи значения сопротивления, обеспечивающие максимальное демпфирование колебаний, найденные из условия (4.2) и найденные из условия минимума амплитуды при вынужденных колебаниях на соответствующей резонансной частоте, достаточно близки. Для  $RL$ -цепей значения сопротивлений и индуктивностей, обеспечивающих максимальное демпфирование соответствующей моды при свободных колебаниях и значения  $R$  и  $L$ , обеспечивающие минимальные значения амплитуды на соответствующем резонансном режиме, различаются.

Для численного моделирования вынужденных установившихся колебаний рассматривается пластина, представленная на рис. 4.2.а, при заданных перемещениях на торце  $x=0$ :  $u_x = u_y = 0$ ,  $u_z = U_0 \cos(pt)$ . На рисунке 4.10 при различных значениях  $R$  и  $L$  представлены линии равного уровня значений амплитуды перемещений свободного торца пластины в окрестности первого резонанса, а также линии равного уровня для значений мнимой части комплексной собственной частоты первой моды колебаний.

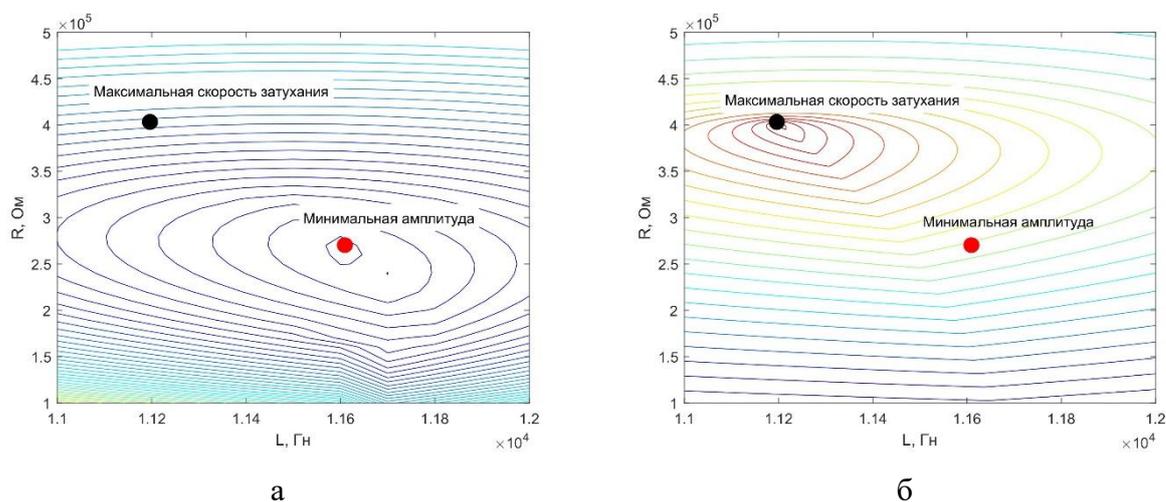


Рисунок 4.10. – Линии равного уровня резонансных амплитуд (а) и мнимой части комплексной собственной частоты (б) для первой моды

На этих рисунках красная точка соответствует параметрам  $R$  и  $L$ , при которых достигается минимальное значение амплитуды, а черная точка – параметрам, при которых модуль мнимой части первой комплексной собственной частоты принимает максимальное значение. Эти результаты демонстрируют различие значений параметров элементов  $RL$ -цепи, обеспечивающих максимальное демпфирование соответствующей моды при вынужденных колебаниях и при свободных колебаниях. Дополнением к данному представлению является рисунок 4.11, на котором представлены амплитудно-частотные характеристики перемещений свободного торца при значениях  $R$  и  $L$ , обеспечивающих минимальное значение (красный цвет) амплитуды, и при значениях  $R$  и  $L$ , обеспечивающих максимальное значение модуля мнимой части первой комплексной собственной частоты колебаний.

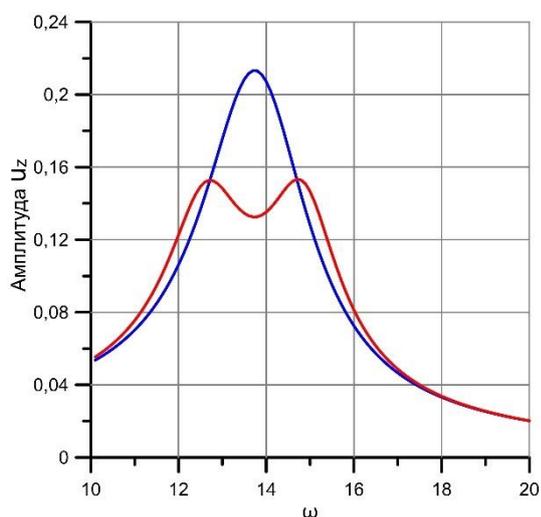


Рисунок 4.11. – Амплитудно-частотная характеристика перемещений свободного торца пластины

Для рассматриваемой пластины на основе алгоритма решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях были найдены значения  $R$  и  $L$ , обеспечивающие для первого и второго резонансов минимальные значения амплитуд. Среди различных передаточных функций есть такие, в которых параметры цепей обеспечивают лучшее демпфирование при вынужденных колебаниях. Один из таких вариантов передаточной функции приведен в работе [58], в котором для вычисления значений  $R$  и  $L$  используются следующие соотношения:

$$L_{opt}^j = \frac{1}{C_j(1+K_j^2)(\omega_{s/c}^j)^2}; \quad R_{opt}^j = \frac{\sqrt{2}K_j}{C_j(\omega_{s/c}^j)(1+K_j^2)} \quad (4.4)$$

Согласно предположениям, на основе которых выводились формулы (4.4), эти параметры должны обеспечивать минимальную величину амплитуды колебаний на заданной моде.

В таблице 4.7 для пластины представлены значения  $R$  и  $L$ , найденные на основе четырех описанных выше вариантов. В первом варианте параметры найдены из условия минимума амплитуды при вынужденных установившихся колебаниях; во втором — из условия (4.2); в третьем варианте параметры определялись на основе передаточной функции, которая, по сравнению с другими, обеспечивает максимальное демпфирование при свободных колебаниях (4.3); в четвертом — на основе передаточной функции, обеспечивающей наилучшее демпфирование при вынужденных колебаниях (4.4).

Таблица 4.7. Результаты подбора параметров цепи по различным критериям

№	$\omega_{s/c}$	$\omega_{o/c}$	Вынужденные установившиеся колебания		Собственные колебания		Соотношения (4.3)		Соотношения (4.4)	
			$\frac{L}{R}$	$\frac{\omega_{Re}}{\omega_{Im}}$	$\frac{L}{R}$	$\frac{\omega_{Re}}{\omega_{Im}}$	$\frac{L}{R}$	$\frac{\omega_{Re}}{\omega_{Im}}$	$\frac{L}{R}$	$\frac{\omega_{Re}}{\omega_{Im}}$
1	13.58	13.86	$\frac{11650}{254}$	$\frac{14.86}{0.83}$	$\frac{11197}{403.0}$	$\frac{13.82}{1.39}$	$\frac{11212}{403.9}$	$\frac{13.86}{1.33}$	$\frac{11690}{290}$	$\frac{14.72}{0.91}$
2	72.15	72.33	$\frac{431.2}{17.8}$	$\frac{74.23}{1.59}$	$\frac{428.7}{27.9}$	$\frac{72.43}{2.55}$	$\frac{420}{26.8}$	$\frac{71.56}{1.67}$	$\frac{413}{19}$	$\frac{70.91}{1.19}$

На рисунке 4.12 для этих четырех вариантов приведены амплитудно-частотные характеристики перемещений свободного торца пластины в окрестности первого и второго резонансов. Приведенные результаты демонстрируют поиск на основе результатов решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях значений  $R$  и  $L$ , обеспечивающих минимальные значения резонансных амплитуд на всем частотном диапазоне. Известные передаточные функции обеспечивают достаточно близкие результаты, но, как правило, только на одной из резонансных частот.

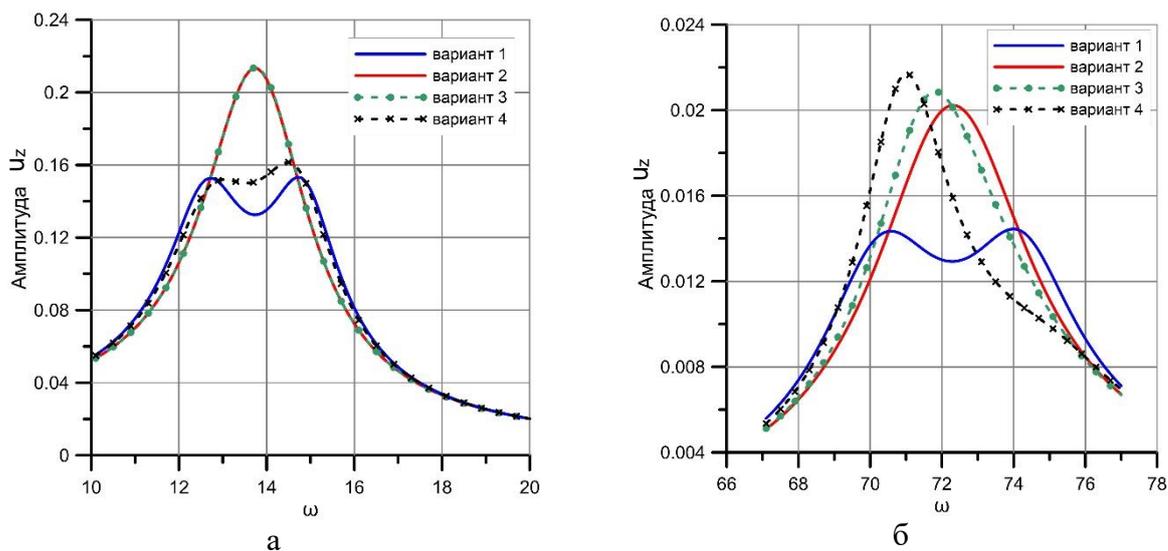


Рисунок 4.12. – АЧХ для первой (а) и второй (б) мод колебаний пластинки

### 4.3. Мультимода́льное демпфи́рование smart-систем на основе пьезоэлементов при использовании вариантах пассивных схем внешних электрических цепей.

Как было продемонстрировано выше, последовательная резонансная электрическая цепь, шунтирующая пьезоэлемент, позволяет демпфировать колебания только на одной заданной частоте, на которую электрическая цепь настраивается соответствующим подбором параметров  $R$  и  $L$ . Однако проведенные исследования показали, что в случае использования резонансной цепи для демпфирования колебаний одной моды имеются варианты, когда демпфирование наблюдается не только на частоте той моды, на которую настроена внешняя цепь. Это позволяет рассмотреть возможность использования одного пьезоэлемента, шунтированного одной последовательной резонансной  $RL$ -цепью, для демпфирования колебаний на нескольких модах (мультимода́льное демпфи́рование).

Для подбора критерия поиска параметров внешней электрической цепи, обеспечивающих демпфирование колебаний на нескольких модах, предлагается использовать мнимые части комплексных собственных частот колебаний  $\omega_{im}$ . Анализ поведения мнимых частей  $\omega_{im}$  в пространстве параметров  $R$  и  $L$  показал наличие вариантов совпадения  $\omega_{im}$  для собственных частот колебаний, соответствующих различным модам. Наличие такого совпадения свидетельствует о том, что при соответствующих значениях параметров последовательной  $RL$ -цепи скорость затухания колебаний на этих модах

одинакова. Исходя из этого, для подбора параметров внешней последовательной резонансной  $RL$ -цепи было выбрано следующее условие: для демпфирования колебаний на нескольких модах параметры внешней цепи должны соответствовать точке в пространстве параметров  $R$  и  $L$ , в которой модули мнимых частей комплексных собственных частот колебаний, соответствующих данным модам, одинаковы и принимают максимальное значение среди всех возможных вариантов совпадения.

Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере тонкостенной оболочки в форме полуцилиндра, жестко заземленной по торцам и свободно опертой по образующим (рис. 4.2.б). Решение задачи о собственных колебаниях рассматриваемого объекта указывает на то, что в диапазоне от 0 Гц до 1500 Гц находится 15 собственных частот колебаний.

При данном расположении пьезоэлемента на его электродированной поверхности электрический потенциал, достаточный по величине для его регистрации и дальнейшего использования, может генерироваться на частотах, соответствующих только пяти модам колебаний. Малая величина электрического потенциала (практически его отсутствие) на частотах, соответствующих остальным модам, объясняется тем, что формы колебаний этих мод таковы, что при выбранном расположении пьезоэлемент либо не деформируется, либо деформируется симметрично, вследствие чего обеспечивается равенство положительных и отрицательных зарядов, приводящее к его (заряда) суммарному нулевому значению.

Таблица 4.8. Результаты подбора параметров внешней последовательной  $RL$ -цепи для пяти рассматриваемых мод колебаний

№ моды	Собственные частоты колебаний оболочки без внешней цепи $f$ , Гц	Оптимальные параметры цепи $L$ (Гн), $R$ (кОм)	Собственные частоты колебаний оболочки с внешней цепью $\omega = \omega_{\text{Re}} - i\omega_{\text{Im}}$
1	557.41	$L=6.93, R=5.3$	$553.60 - i 28.30$
4	759.57	$L=3.66, R=4.1$	$750.59 - i 32.06$
5	803.79	$L=3.67, R=4.02$	$813.58 - i 31.12$
12	1293.42	$L=1.3, R=2.18$	$1308.34 - i 48.24$
15	1482.21	$L=1.04, R=2.57$	$1493.29 - i 81.48$

На основе решения задачи о собственных колебаниях получены значения собственных частот колебаний для оболочки без внешней цепи (действительные), и с внешней  $RL$ -цепью (комплексные), параметры которой были подобраны для

максимального демпфирования одной из рассматриваемых пяти мод колебаний. Результаты расчетов значений оптимальных параметров последовательной  $RL$ -цепи для этих мод приведены в таблице 4.8.

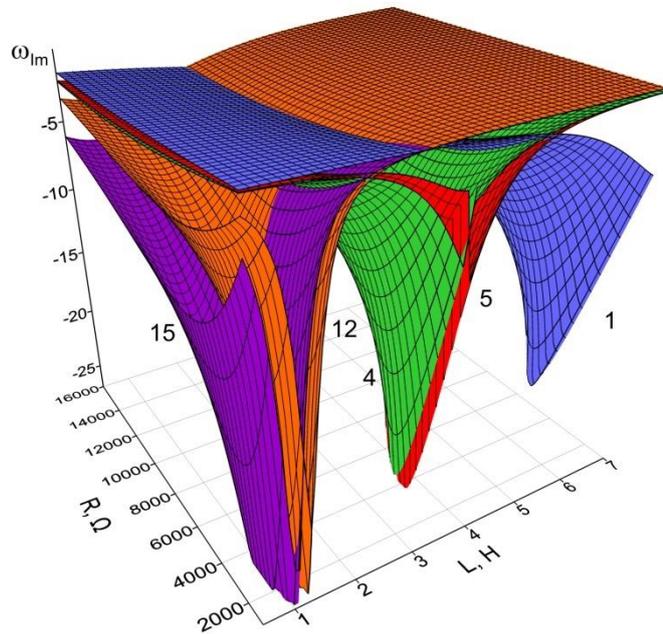
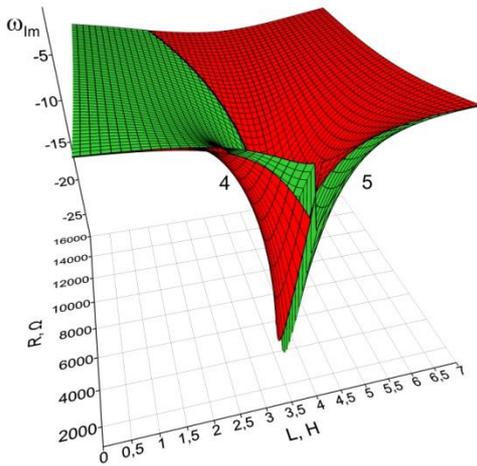
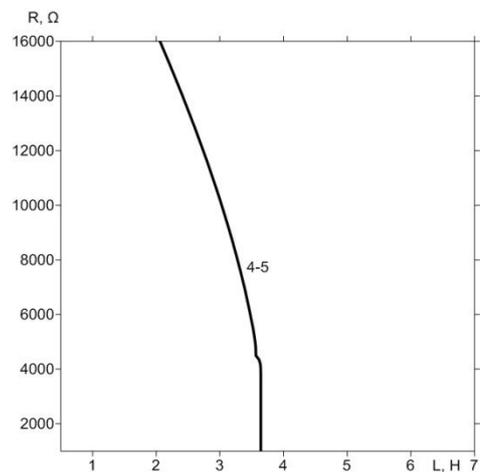


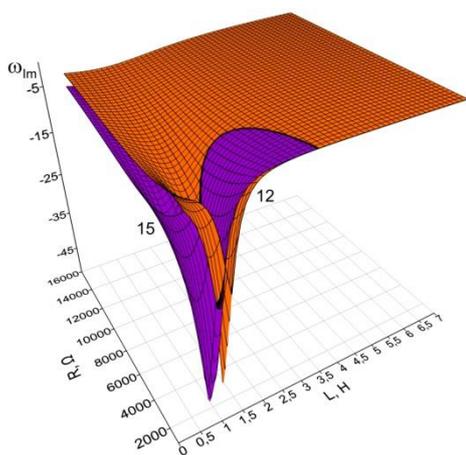
Рисунок 4.13. – Зависимость показателей демпфирования колебаний от параметров электрической цепи  $R$  и  $L$  для пяти рассматриваемых мод колебаний.



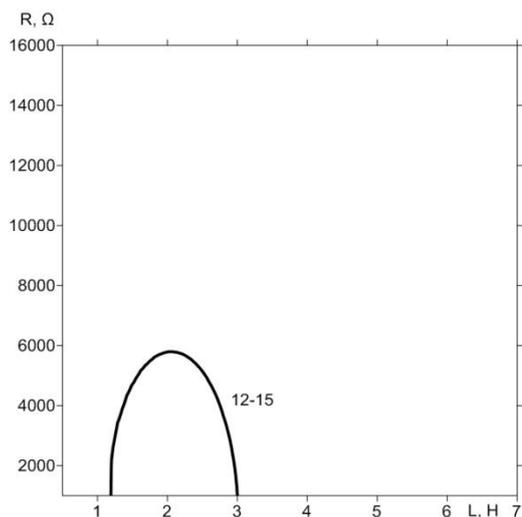
а



б



В



Г

Рисунок 4.14 – Зависимостей показателей демпфирования колебаний от параметров электрической цепи  $R$  и  $L$  и проекции линий их совпадения: для 4 и 5 частот колебаний (а, б); для 14 и 15 частот колебаний (в, г).

На основе решения задачи о собственных колебаниях методом сканирования были получены зависимости значений показателей демпфирования колебаний  $\omega_{Im}$  пяти рассматриваемых собственных мод колебаний системы (оболочка с пьезоэлементом и внешней электрической цепью) в зависимости от изменения параметров  $R$  и  $L$  внешней цепи (рис. 4.13).

Выделим моды, для которых мнимые части комплексных собственных частот имеют одинаковые значения при одних и тех значениях параметров внешней цепи. Согласно полученным результатам, это будут две пары мод колебаний: 4 и 5 (рисунок 4.14.а); 12 и 15 (рисунок 4.14.в).

На рисунках 4.14.б и 4.14.г приведены проекции линий совпадения показателей демпфирования для двух выбранных пар мод колебаний в пространстве параметров  $R$  и  $L$ . Вдоль этих линий величина показателей демпфирования  $\omega_{Im}$  меняется, и для обеспечения наилучшего демпфирования колебаний конструкции на соответствующих модах, необходимо найти те значения параметров внешней цепи, при которых величина показателей демпфирования максимальна.

В таблице 4.9 приведены значения параметров внешней цепи  $R$  и  $L$ , при которых у 4 и 5, 12 и 15 мод колебаний совпадающие мнимые части комплексных собственных частот



максимальны. Моды колебаний, у которых совпадающие мнимые части комплексных собственных частот максимальны, выделены шрифтом.

Сравнение мнимых частей собственных частот колебаний, приведенных в таблицах 4.8 и 4.9, позволяет сделать вывод о возможности демпфирования колебаний как минимум на двух модах с помощью одной последовательной резонансной электрической цепи, присоединенной к одному пьезоэлементу, при соответствующем выборе параметров цепи. Стоит отметить, что значения мнимых частей комплексных собственных частот при попарном демпфировании у 4 и 5, а также у 12 и 15 мод колебаний меньше, чем при подборе параметров цепи для демпфирования колебаний только на одной заданной моде (таблица 4.8). Так, для 4 и 5 мод при попарном демпфировании значения мнимых частей оказываются примерно на 30% ниже максимально возможных показателей, приведенных в таблице 4.8. Для 12 моды при попарном демпфировании снижение относительно максимальных показателей достигает 50%, а для 15 моды – 70%. Тем не менее, даже при таких значениях показателей демпфирования (таблица 4.9) мы можем говорить о достаточно высокой степени демпфирования.

Таблица 4.9. Значения собственных частот колебаний при параметрах внешней цепи, обеспечивающих для двух частот максимальное значение совпадающих мнимых частей

1 частота	4 частота	5 частота	12 частота	15 частота
$R=4.41$ кОм, $L=3.57$ Гн				
551.77 - $i$ 1.98	<b>755.40 - <math>i</math> 23.76</b>	<b>791.50 - <math>i</math> 23.58</b>	1296.47 - $i$ 0.71	1486.35 - $i$ 0.76
$R=2.45$ кОм, $L=1.19$ Гн				
553.67 - $i$ 0.45	754.17 - $i$ 1.11	798.66 - $i$ 0.93	<b>1281.48 - <math>i</math> 25.43</b>	<b>1507.57 - <math>i</math> 25.76</b>

Продолжая анализ зависимостей, приведенных на рисунке 4.13, можно обнаружить, что в пространстве  $R$ - $L$  существуют точки, в которых показатели демпфирования совпадают более, чем для двух мод колебаний. На рисунке 4.15 приведены проекции линий совпадения показателей демпфирования попарно для всех пяти рассматриваемых мод, анализ которых позволил определить четыре точки совпадения показателей демпфирования для трех мод (на графике обозначены римскими цифрами): I – 4, 12, 15 моды; II – 5, 12, 15 моды; III – 1, 12, 15 моды; IV – 4, 5 и 15 моды.

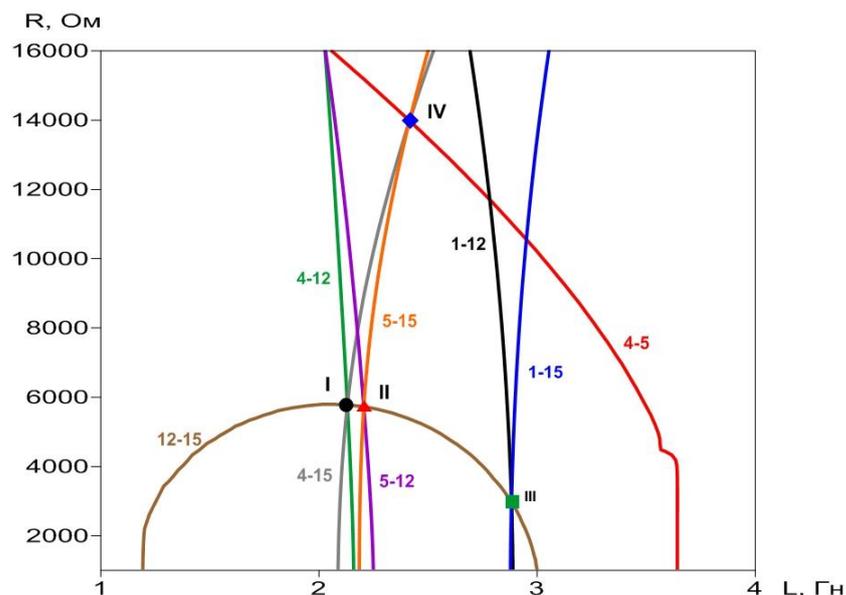


Рисунок 4.15. – Проекция линий совпадения мнимых частей для всех вариантов комбинаций пар мод колебаний

Таблица 4.10. Значения  $R$ ,  $L$  и собственных частот колебаний, при которых совпадают мнимые части более чем у двух собственных частот колебаний.

	1 частота	4 частота	5 частота	12 частота	15 частота
I	$R=5.77$ кОм, $L=2.14$ Гн				
	553.34 - $i$ 1.36	<b>753.82 - <math>i</math> 4.41</b>	797.98 - $i$ 3.75	<b>1298.61 - <math>i</math> 4.12</b>	<b>1489.72 - <math>i</math> 4.06</b>
II	$R=5.72$ кОм, $L=2.21$ Гн				
	553.28 - $i$ 1.38	753.70 - $i$ 4.65	<b>797.84 - <math>i</math> 3.95</b>	<b>1298.54 - <math>i</math> 3.73</b>	<b>1489.49 - <math>i</math> 3.68</b>
III	$R=2.94$ кОм, $L=2.88$ Гн				
	<b>552.30 - <math>i</math> 1.01</b>	747.78 - $i$ 7.20	792.75 - $i$ 5.17	<b>1297.78 - <math>i</math> 0.96</b>	<b>1487.89 - <math>i</math> 0.95</b>
IV	$R=13.99$ кОм, $L=2.42$ Гн				
	554.65 - $i$ 2.39	<b>757.92 - <math>i</math> 4.10</b>	<b>801.76 - <math>i</math> 4.09</b>	1295.43 - $i$ 2.10	<b>1485.87 - <math>i</math> 3.90</b>
V	$R=5.75$ кОм, $L=2.20$ Гн				
	553.30 - $i$ 1.39	<b>753.73 - <math>i</math> 4.64</b>	<b>797.86 - <math>i</math> 3.94</b>	<b>1298.53 - <math>i</math> 3.76</b>	<b>1489.49 - <math>i</math> 3.71</b>

В таблице 4.10 приведены значения  $R$  и  $L$ , при которых совпадают мнимые части собственных частот вышеуказанных мод колебаний и соответствующие собственные частоты колебаний. Моды колебаний, у которых совпадают мнимые части, выделены жирным шрифтом. Точки I и II на рис. 4.15 достаточно близки, что демонстрирует возможность при соответствующем подборе параметров внешней электрической цепи

демпфировать колебания конструкции на 4, 5, 12, 15 модах с помощью одного пьезоэлемента и одной последовательной  $RL$ -цепи.

Согласно результатам, приведенным в таблице 4.10, демпфирование с помощью одной последовательной резонансной  $RL$ -цепи на частотах, соответствующих 1, 12 и 15 модам колебаний малоэффективно, так как величины мнимых частей комплексных собственных частот колебаний хотя и близки, но малы по величине. В последней строке таблицы 4.10 приведены значения частот для параметров цепи, выбранных произвольно из интервала, ограниченного значениями  $R$  и  $L$ , полученными для I и II групп. Достаточно высокие и соизмеримые между собой значения мнимых частей рассматриваемых собственных частот колебаний позволяют сделать вывод о возможности заметного демпфирования колебаний сразу на четырех модах (4, 5, 12 и 15) с помощью внешней электрической цепи с параметрами  $R$  и  $L$  из последней строки таблицы 4.10.

#### **4.4. Использование электропроводящих композитных материалов для демпфирования колебаний smart-систем на основе пьезоэлементов.**

Возможность использования в smart-конструкциях шунтирующих электрических цепей стимулирует развитие соответствующей элементной базы для исполнения резистивных, ёмкостных и индуктивных свойств. Анализ информации об электропроводящих полимерах, в частности – о графеновых композитах, позволяет заключить, что элементы из этих материалов могут одновременно с реализацией механических свойств как деформируемое тело выполнять роль резистивных элементов электрических цепей [176-179]. На основе этого заключения предлагается вариант smart-систем, в которых используются элементы из электропроводящих материалов, реализующие классические механические свойства, и выполняющие роль резистора или магазина резисторов.

В качестве примера рассматривается консольно-защемленная пластина (500x100x1 мм), представленная на рисунке 4.16, к верхней грани которой прикреплена пластина (60x90x1.3 мм) из пьезоэлектрического материала, а к нижней грани – пластина (100x100x2 мм) из графенового композита.

Ставится задача поиска варианта исполнения этой системы, обеспечивающего максимальное демпфирование первых трех мод изгибных колебаний. Основная пластина

выполнена из алюминия:  $E = 6.85 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu = 0.3$ ;  $\rho = 2750$  кг/м<sup>3</sup>. Пьезоэлемент размером 60x90x1.3 мм выполнен из материала ПКР7, поляризованного в направлении оси  $z$  и обладающего следующими физико-механическими характеристиками:  $C_{11} = C_{22} = 12.5 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{12} = 8.40 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{13} = C_{23} = 8.10 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{33} = 12.1 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{44} = 2.05 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{55} = C_{66} = 2.36 \cdot 10^{10}$  Па,  $\beta_{31} = \beta_{32} = -9.0$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\beta_{33} = 28.3$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\beta_{52} = \beta_{61} = 17.9$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1.27 \cdot 10^{-8}$  Ф/м,  $\varepsilon_{33} = 1.20 \cdot 10^{-8}$  Ф/м,  $\rho = 7500$  кг/м<sup>3</sup>.

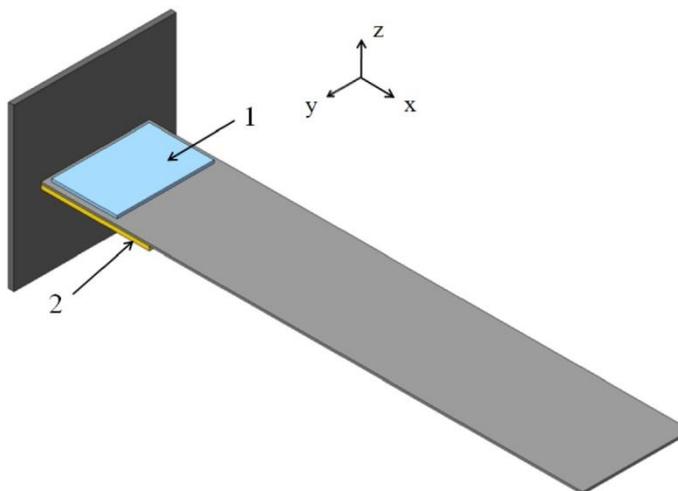


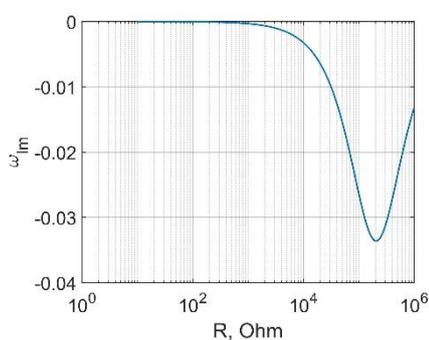
Рисунок 4.16. – Пластина с пьезоэлементом (1) и элементом из графенового композита (2).

В выполненных расчетах рассмотрен вариант графенового композита на основе полиметилметакрилата (ПММА). При моделировании этого элемента в рамках соотношений линейной теории упругости были заданы следующие свойства материала: модуль сдвига  $G = 2.29 \cdot 10^8$  Па; объемный модуль  $B = 5.96 \cdot 10^8$  Па; удельная плотность  $\rho = 1190$  кг/м<sup>3</sup>. При моделировании элемента в рамках теории линейной наследственной вязкоупругости комплексный модуль сдвига  $G = G^R + iG^I$  и упругий объемный модуль задавались следующим образом:  $G^R = 2.29 \cdot 10^8$  Па,  $G^I = 5.73 \cdot 10^7$  Па,  $B = 5.96 \cdot 10^8$  Па.

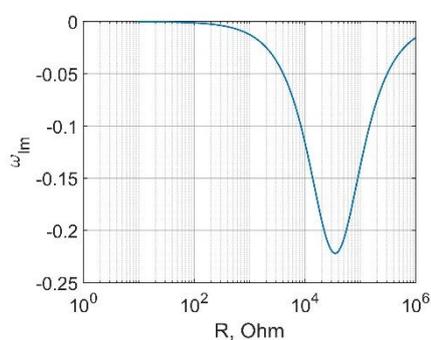
Для мультимодального демпфирования колебаний используется вариант демпфирующего устройства на основе одного пьезоэлектрического элемента и сложной внешней электрической цепи. В данном случае электрическая цепь представляет собой три резистивных элемента, не связанных между собой, каждый из которых может подключаться к пьезоэлементу в зависимости от частоты колебаний пластины. Для построения электрической цепи, состоящей из трех отдельных резисторов, на основе

элемента из графенового композита предлагается определить конфигурацию расположения электродированных поверхностей, которые при замыкании в соответствующем порядке обеспечат требуемые значения сопротивлений.

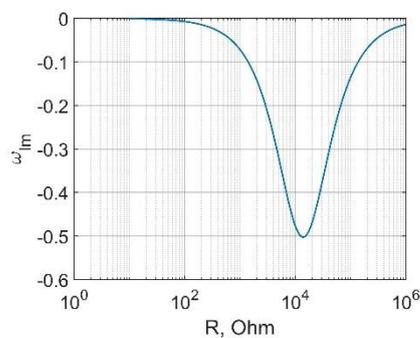
Вариант максимального демпфирования заданных мод колебаний находится на основе решения оптимизационной задачи, связанной с поиском значений сопротивлений, обеспечивающих максимальную скорость затухания соответствующих мод при собственных колебаниях [179]. На рисунке 4.17 для рассматриваемого примера приведены значения мнимых частей первых трех комплексных собственных частот колебаний, характеризующие скорость затухания колебаний в зависимости от значений сопротивлений.



Первая мода



Вторая мода



Третья мода

Рисунок 4.17. – Значения мнимых частей комплексных собственных частот колебаний для первых трех изгибных мод колебаний пластинки в зависимости от значений сопротивлений.

Данные зависимости позволяют определить значения сопротивлений  $R_1^{opt} = 210$  кОм,  $R_2^{opt} = 35$  кОм,  $R_3^{opt} = 14$  кОм, обеспечивающих максимальное демпфирование

соответственно первой, второй и третьей мод изгибных колебаний. Результаты получены при рассмотрении графенового элемента в рамках упругой модели. Учет вязкоупругих свойств графенового композита приводит к изменению величин мнимых частей комплексных собственных частот колебаний, но практически не отражается на значении величины сопротивления, обеспечивающего максимальную скорость затухания колебаний.

Далее, для получения найденных значений сопротивления  $R_1^{opt}$ ,  $R_2^{opt}$  и  $R_3^{opt}$  осуществляется поиск конфигурации электродированных поверхностей у графенового элемента. С этой целью решается задача электростатики для однородной проводящей среды. В качестве такой среды рассматривается пластина, выполненная из графенового композита, проводящие свойства которой в рамках данного исследования приняты однородными, изотропными и не зависящими от деформации. Значение удельной проводимости принято равным  $\gamma = 1.173 \cdot 10^4$  Си/м, что соответствует диапазону этих величин для ПММА, приведенным в статье [178].

Рассмотрим вариант конфигурации электродов, при котором нижняя поверхность графенового элемента полностью покрыта токопроводящим слоем пренебрежимо малой толщины и массы (нижняя электродированная поверхность).

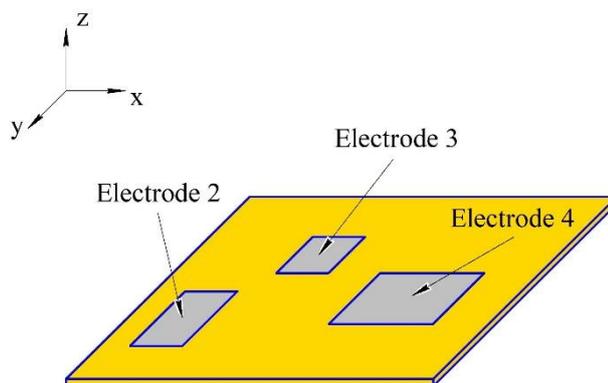


Рисунок 4.18. – Определение конфигурации проводящих участков на верхней поверхности графенового элемента

Требуется определить размер и расположение электродированных участков на второй поверхности элемента, при которых обеспечиваются необходимые значения электрического сопротивления. При этом сопротивление  $R_1^{opt}$  должно обеспечиваться при замыкании нижней электродированной поверхности (Electrode 1) и электродированного участка, обозначенного на рисунке 4.18 как Electrode 2; сопротивление  $R_2^{opt}$  – при

замыкании Electrode 1 и Electrode 3; а сопротивление  $R_3^{opt}$  – при замыкании Electrode 1 и Electrode 4.

Для решения поставленной задачи необходимо определить напряженность электрического поля в среде, заключенной между двумя проводящими участками рассматриваемого элемента из графенового композита: Electrode 1 и Electrode 2, Electrode 1 и Electrode 3, Electrode 1 и Electrode 4, на каждом из которых задается постоянное во времени значение электрического потенциала. Величина напряженности электрического поля является результатом решения уравнения (4.5) при граничных условиях вида (4.6):

$$E = -\nabla \varphi \quad (4.5)$$

$$\varphi|_{z=0} = \varphi_1, \quad \varphi|_{z=h_{gr}} = \varphi_2 \quad (4.6)$$

где  $z=0$  определяет поверхность Electrode 1,  $h_{gr}$  – толщина пластины из графенового композита,  $z=h_{gr}$  – определяет одну из поверхностей Electrode 2, Electrode 3 или Electrode 4. Решение уравнения (4.5) с заданными граничными условиями (4.6) отыскивается численно методом конечных элементов, реализованным в пакете программ ANSYS.

На основе закона Ома в дифференциальной форме и решения уравнения (4.5) находятся значения компонент вектора плотности тока в каждой точке рассматриваемой среды:

$$j_i = \gamma_{ij} E_j \quad (4.7)$$

где  $j_i$  – компоненты вектора плотности тока,  $\gamma_{ij}$  – компоненты тензора удельной проводимости среды,  $E_j$  – компоненты вектора напряженности электрического поля в рассматриваемой точке среды. Зная значение вектора плотности тока в каждой точке, можно найти значение силы тока, протекающего через любую замкнутую поверхность  $S_0$  проводящей среды, по направлению вектора нормали  $n$  к ней:

$$I = \int (j \cdot n) dS \quad (4.8)$$

Далее, учитывая, что разность потенциалов между проводящими участками рассматриваемого элемента известна  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , и используя интегральную формулировку закона Ома для однородного проводника, можно определить значение сопротивления

рассматриваемого проводящего элемента при протекании тока между соответствующими электродированными участками:

$$R = \frac{U}{I} \quad (4.9)$$

В результате вычислительных экспериментов был подобран один из вариантов расположения и размеров электродированных поверхностей, при которых обеспечиваются требуемые значения сопротивления  $R_1^{opt}$ ,  $R_2^{opt}$  и  $R_3^{opt}$ . Размеры и расположение электродированных поверхностей приведены на рис.4.19. Расстояние между электродами по оси  $x$  – 10 мм.

Для анализа эффективности использования в smart-системах резистивной функции графеновых композитов исследованы три варианта рассматриваемой задачи:

1. Учитываются только вязкоупругие свойства элемента из графенового композита;
2. Графеновый композит – упругий и реализует функцию резистора;
3. Графеновый композит – вязкоупругий и реализует функцию резистора.

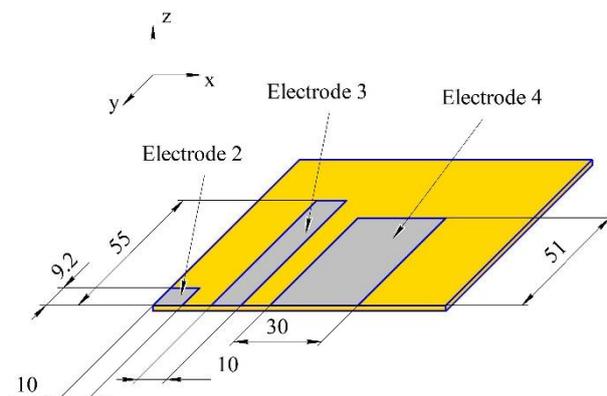


Рисунок 4.19. – Схема электродированных поверхностей, обеспечивающих оптимальные значения сопротивления.

В таблице 4.11 для этих вариантов приведены значения комплексных собственных частот колебаний для трех рассматриваемых мод. При этом для первой моды колебаний электрический потенциал с пьезоэлектрического элемента подается на 1 и 2 электроды, для второй моды – на 1 и 3 электроды, для третьей моды – на 1 и 4 электроды графенового элемента.

Приведенные результаты позволяют заключить, что при совместном действии двух механизмов демпфирования (вязкоупругих свойств материала и резистора) величина



скорости затухания колебаний является суммой скоростей затухания колебаний каждого из механизмов, реализуемых отдельно.

Таблица 4.11. Результаты решения задачи о собственных колебаниях

мода колебаний	$\omega = \omega_R + i\omega_I$		
	вариант 1	вариант 2	вариант 3
первая	$7.82 - i 0.044$	$7.78 - i 0.034$	$7.78 - i 0.078$
вторая	$46.34 - i 0.166$	$46.11 - i 0.222$	$46.12 - i 0.387$
третья	$120.23 - i 0.332$	$119.72 - i 0.502$	$119.73 - i 0.833$

Наряду с задачей о собственных колебаниях рассмотрена задача о вынужденных установившихся колебаниях. В качестве внешних воздействий рассмотрен вариант задания перемещений при  $x = 0$ :

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = u_0 \sin pt$$

На рисунке 4.20 приведены амплитудно-частотные характеристики перемещений свободного торца пластины в окрестности первого, второго и третьего резонансов для вариантов, когда учитываются только вязкоупругие свойства элемента из графенового композита (синяя штриховая линия), варианта, когда графеновый композит упругий и реализует функцию резистора (красная штрихпунктирная линия), и варианта, когда графеновый композит вязкоупругий и реализует функцию резистора (черная сплошная линия). При этом электрический потенциал с пьезоэлектрического элемента в диапазоне частот внешнего воздействия  $\omega$  от 0 до 20 Гц подавался на 1 и 2 электроды графенового элемента, от 20 до 60 Гц – на 1 и 3 электроды, более 60 Гц – на 1 и 4 электроды.

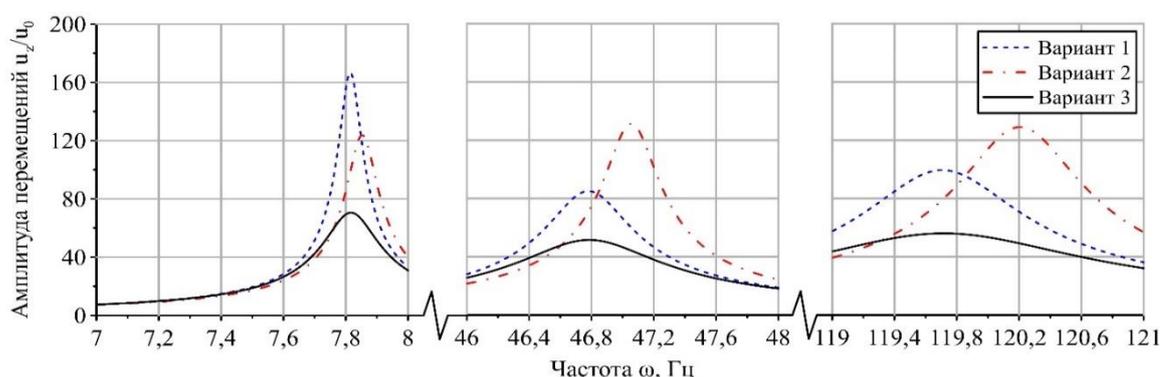


Рисунок 4.20. Амплитудно-частотные характеристики для перемещений  $u_z$  свободного торца пластины в окрестности первого, второго и третьего резонансов изгибных мод колебаний.

Анализ этих результатов показывает, что использование свойств электрической проводимости графеновых композитов в smart-конструкциях, основанных на использовании пьезоэлементов, дает дополнительные возможности при демпфировании колебаний. При этом следует обратить внимание на то, что в рассмотренном примере эффективность демпфирования колебаний при использовании резистора в сравнении с влиянием на демпфирование вязкоупругих свойств материала более высокая на 2 и 3 модах изгибных колебаний.

## Заключение

**Итоги выполненного исследования.** Сформулирована новая математическая постановка задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях smart-систем, представляющих собой кусочно-однородные деформируемые тела с упругими пьезоэлементами, к электродированным поверхностям которых подключены электрические цепи различной архитектуры, состоящие из резистивных, индуктивных и емкостных элементов.

Для численной реализации методом конечных элементов предложенной математической постановки задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях деформируемых тел с пьезоэлементами и внешними электрическими цепями разработан новый алгоритм, позволяющий использовать глобальные конечно-элементные матрицы, формируемые в пакете прикладных программ ANSYS, с их последующей декомпозицией на необходимые компоненты, входящие в разрешающую систему алгебраических уравнений. Представленный алгоритм применим к кусочно-однородным электровязкоупругим телам произвольной геометрии, к которым присоединены электрические цепи произвольного типа.

На основе анализа собственных частот колебаний предложен новый алгоритм поиска компоновок систем пьезоэлементами, обеспечивающих максимальные показатели пьезоэффекта, и выполнен сравнительный анализ с другими алгоритмами.

С использованием разработанных алгоритмов решения задач о собственных и вынужденных колебаниях продемонстрирован поиск параметров внешней электрической цепи для smart-систем на основе пьезоэлементов, обеспечивающих максимальное демпфирование при свободных и вынужденных колебаниях. Показано, что предложенные методы на основе соотношений механики деформируемого твердого тела обеспечивают поиск вариантов с более высокими показателями демпфирования колебаний, чем известные варианты на основе передаточных функций.

Предложен и продемонстрирован вариант использования в рассматриваемых smart-системах на основе пьезоэлементов электропроводящих композиционных материалов, которые наряду с их механическими свойствами выполняют роль резистивных элементов и обеспечивают возможность дополнительного мультимодального демпфирования.

**Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы.** Новые постановки и соответствующие алгоритмы численной реализации задач о колебаниях smart-систем на основе пьезоэлементов с учетом тепловыделений и нелинейных эффектов.

## Список литературы

1. Jalili, N. Piezoelectric-Based Vibration Control: From Macro to Micro/Nano Scale Systems. / N. Jalili. – New York: Springer, Science and Business Media. – 2010. – 519p.
2. Korenev, B.G. Dynamic vibration absorbers: theory and technical applications. / B.G. Korenev, L.M. Reznikov. – Chichester: Wiley. – 1993.
3. Esmailzadeh, E. Optimum design of vibration absorbers for structurally damped Timoshenko beams. / E. Esmailzadeh, N. Jalili // ASME Journal of Vibrations and Acoustics. – 1998. – Vol.120. – No.4. – P.833 – 841.
4. Puksand, H. Optimum conditions for dynamic vibration absorbers for variable speed systems with rotating and reciprocating unbalance. / H. Puksand // International Journal of Mechanical Engineering Education. – 1975. – Vol.3. – P.145 – 152.
5. Warburton, G.B. Optimum absorber parameters for simple systems. / G.B. Warburton, E.O. Ayorinde // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. – 1980. – Vol.8. – P.197 – 217.
6. Sun, J.Q. Passive, adaptive, and active tuned vibration absorbers – A survey. / J.Q. Sun, M.R. Jolly, M.A. Norris // ASME Transactions, Special 50th Anniversary, Design Issue. – 1995. – Vol.117. – P.234 – 242.
7. Soong, T.T. Passive and active structural control in civil engineering / T.T. Soong, M.C. Constantinou. – Wien and New York: Springer. – 1994.
8. Margolis, D. Retrofitting active control into passive vibration isolation systems. / D. Margolis // ASME Journal of Vibration and Acoustics. – 1998. – Vol.120. – P.104110.
9. Lee-Glauser, G.J. Integrated passive/active vibration absorber for multistory buildings. / G.J. Lee-Glauser, G. Ahmadi, L.G. Horta // ASCE Journal of Structural Engineering. – 1997. – Vol. 123. – No.4. – P.499 – 504.
10. Jalili, N. A new perspective for semi-automated structural vibration control. / N. Jalili // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – Vol.238. – No.3. – P.481 – 494.
11. Hurmuzlu Y. The Mechanical Systems Design Handbook Modeling, Measurement, and Control / Hurmuzlu Y., Nwokah O.D.I. – Boca Raton: CRC Press LLC. – 2002. – P.872.
12. Inman, D. J. Vibration with Control, Measurement and Stability. / D. J. Inman. – New Jersey: Prentice-Hall. – 1989.

13. Meirovitch, L. Dynamics and Control of Structures. / L. Meirovitch. – New York: John Wiley. – 1990.
14. Preumont, A. Vibration Control of Active Structures: An Introduction. / A. Preumont. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 2002.
15. Rogers, C. A. Intelligent materials. / C. A. Rogers // Scientific American. – 1995. – Vol.273. – No.5. – P.122 – 125.
16. Rogers, C. A. Intelligent material systems—the dawn of a new materials age. / C. A. Rogers // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 1993. – Vol.4. – P.4 – 12.
17. Gordon, J. E. Structures and Materials. / Gordon, J. E. – New York: Scientific American Library. – 1988.
18. Leo, D. Engineering Analysis of Smart Material Systems. / D. Leo. – Hoboken: Wiley. – 2006.
19. Lopes, V. Jr. Dynamics of Smart Systems and Structures Concepts and Applications. / V. Lopes Jr., V. Steffen Jr., M. Amorim Savi. – Switzerland: Springer International Publishing. – 2016. – P.350.
20. Curie J., Curie P. De'veloppement, par pression, de l'e'lectricite' polaire dans les cristaux he'mie'dres a` faces inclines. / J. Curie, P. Curie. – Paris: Comptes Rendus de l'Acade'mie des Sciences. – 1880.
21. Кэди, У. Пьезоэлектричество и его практические применения. / У. Кэди – М.: Изд-во Иностранной литературы. – 1949. – 718 с.: ил.
22. Jaffe, F, Piezoelectric Ceramics. / F. Jaffe, W.R. Cook Jr., H. Jaffe. – London: Academic. – 1971.
23. Партон, В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М: Наука. – 1988. – 471с.
24. Tzou, H.S. Smart materials, precision sensors/actuators, smart structures, and structronic systems. / H.S. Tzou, H.J. Lee, S.M. Arnold // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2004. – Vol.11. – P.367 – 393.
25. Marakakis, K. Shunt Piezoelectric Systems for Noise and Vibration Control: A Review / K. Marakakis, G. Tairidis, P. Koutsianitis, G. Stavroulakis // Frontiers in Built Environment. – 2019. – Vol.5. – Art.64. – 17 pp.
26. Shivashankar, P. Review on the use of piezoelectric materials for active vibration, noise, and flow control / P. Shivashankar, S. Gopalakrishnan // Smart Materials and Structures. – 2020. – Vol.29. – No.5. – Art. 053001.

27. Berardengo, M. Vibration control with piezoelectric elements: The indirect measurement of the modal capacitance and coupling factor / M. Berardengo, S. Manzoni, J. Høgsberg, M. Vanali // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2021. – Vol.151. – Art. 107350.
28. Soleymanzadeh, D. Sensorless adaptive sliding mode position control for piezoelectric actuators with charge leakage / Soleymanzadeh D, Ghafarirad H, Zareinejad M. // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2020. – Vol.31. No.1. – P.40 – 52.
29. Feng, H. High precision robust control design of piezoelectric nanopositioning platform / H. Feng, A. Pang, H. Zhou // *Scientific Reports*. – 2022. – Vol.12. – Art.10357.
30. Al Janaideh, M. Precision motion control of a piezoelectric cantilever positioning system with rate-dependent hysteresis nonlinearities. / M. Al Janaideh, M. Rakotondrabe // *Nonlinear Dynamic*. – 2021. – Vol.104. – P.3385 – 3405.
31. Elahi, H. A Review on Applications of Piezoelectric Materials in Aerospace Industry / H. Elahi, K. Munir, M. Eugeni, M. Abrar, A. Khan, A. Arshad, P. Gaudenzi // *Integrated Ferroelectrics*. – 2020. – Vol.211. No.1. – P.25 – 44.
32. Sheeraz, M.A. Multimodal piezoelectric wind energy harvester for aerospace applications / M.A. Sheeraz, M.S. Malik, K. Rahman, H. Elahi, M. Khurram, M. Eugeni, P. Gaudenzi // *International Journal of Energy Research*. – 2022. – Vol.46. – No.10. – P.698 – 710.
33. Bell, A.J. Expanding the application space for piezoelectric materials / A J. Bell, T.P. Comyn, T.J. Stevenson // *APL Materials*. – 2021. – Vol 9. – Art.010901.
34. Dharmawan, A. G. Steerable miniature legged robot driven by a single piezoelectric bending unimorph actuator / A. G. Dharmawan, H. H. Hariri, S. Foong, G. S. Soh and K. L. Wood // *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. – 2017. – P.6008 – 6013.
35. Hernando-García, J. Motion of a Legged Bidirectional Miniature Piezoelectric Robot Based on Traveling Wave Generation / J. Hernando-García, J.L. García-Caraballo, V. Ruiz-Díez, J.L. Sánchez-Rojas // *Micromachines*. – 2020. – Vol.11. – No.3. – P.321.
36. Hengyu, L. Piezoelectric micro-jet devices: A review / L. Hengyu, L. Junkao, L. Kai, L. Yingxiang // *Sensors and Actuators A: Physical*. – 2019. – Vol.297. – Art.111552.
37. Rico, A. Embedded Piezoelectric Array for Measuring Relative Distributed Forces on Snow Skis // A. Rico, C. Smuts, J. Nawyn, K. Larson // *Intelligent Computing. Lecture Notes in Networks and Systems*. – 2021. – Vol.285.

38. Sheta, E. Active Control of F/A-18 Vertical Tail Buffeting Using Piezoelectric Actuators / E. Sheta, R. Moses, L. Huttshell, V. Harrand // Proceedings of 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. – 2003.
39. Browning, J.S. F-16 Ventral Fin Buffet Alleviation Using Piezoelectric Actuators / J.S. Browning, R.G. Cobb, R.A. Canfield, S.K. Miller // Proceedings of 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. – 2009.
40. Wu, S. Piezoelectric shunt vibration damping of an F-15 panel under high-acoustic excitation. / S. Wu, T. L. Turner, S. A. Rizzi // Proceedings SPIE Smart Structures and Materials: Damping and Isolation. – 2000. – Vol. 3989. – P.276 – 287.
41. Kim, S. J. Improvement of aeroelastic stability of hingeless helicopter rotor blade by passive piezoelectric damping. / S. J. Kim, C. H Han, C. Y. Yun // Proceedings SPIE Conference on Passive Damping and Isolation. – 1999. – P.131 – 141.
42. Zhang, J. M. Passive underwater acoustic damping using shunted piezoelectric coatings. / J. M. Zhang, W. Chang, V. K. Varadan, and V. V. Varadan // IOP Journal of Smart Materials and Structures. – 2001. – Vol.10. – P.414 – 420.
43. Niezrecki, C. Feasibility to control launch vehicle internal acoustics using piezoelectric actuators. / C. Niezrecki, H. H. Cudney // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2001. – Vol.12. – P.647 – 660.
44. Denoyer, K. K. Hybrid structural/acoustic control of a subscale payload fairing. / K. K. Denoyer, S. F. Griffin, and D. Sciulli // Proceedings SPIE Smart Structures and Materials: Smart Structures and Integrated Systems. – 1998. - Vol.3329. – P.237 – 243.
45. Garcia, E. Vibration attenuation in an active antenna structure. / E. Garcia, J. D. Dosch, D. J. Inman // Proceedings of the Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration. – 1991. – P.S35 – S42.
46. Forward, R. L. Electronic damping of vibrations in optical structures. / R. L. Forward // Applied Optics. – 1979. – Vol.18. – P.690 – 697.
47. Swigert, C. J. Electronic damping of orthogonal bending modes in a cylindrical mast—theory. / C. J. Swigert, R. L. Forward // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1981. – Vol.18. – No.1. – P.5 – 10.

48. Forward, R. L. Electronic damping of orthogonal bending modes in a cylindrical mast—experiment. / R. L. Forward // *Journal of Spacecraft and Rockets*, – 1981. – Vol.18. – No.1. – P.11 – 17.
49. Lesieutre, G. A. Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. / G. A. Lesieutre // *The Shock and Vibration Digest*. – 1998. – Vol.30. – No.3. – P. 187 – 195.
50. Crawley, E. F. Use of piezoelectric actuators as elements in intelligent structures. / E. F. Crawley, J. de Luis // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. – 1987. – Vol.25. – No.10. – P.1373 – 1385.
51. Das, A. and Wada, B. Selected Papers on Smart Structures for Spacecraft. Vol. MS167 / A. Das, B. Wada. – Washington: SPIE. – 2001.
52. Moheimani S.O.R. Piezoelectric transducers for vibration control and damping / S.O.R. Moheimani, A.J. Fleming. – New York: Springer, Science and Business Media. – 2010. – P.272.
53. Balas, M.J. Active control of flexible systems. / M. J. Balas // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 1978. – Vol.25. – No.3. – P.415 – 436.
54. Balas, M.J. Feedback control of flexible systems. / M. J. Balas // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1978. – Vol.AC–23. – No.4.
55. Goh, C. J. On the stability problem caused by finite actuator dynamics in the collocated control of large space structures. / C. J. Goh, T. K. Caughey // *International Journal of Control*. – 1985. – Vol.41. No.3. – P.787 – 802.
56. Moheimani, S.O.R. Recent developments in structural vibration control using piezoelectric transducers. / S.O.R. Moheimani // *Proceedings of International Congress on Mechatronics*. – 2004.
57. Fanson, J. L. Positive position feedback-control for large space structures. / J. L. Fanson, T. K. Caughey. // *AIAA Journal*. – 1990. – Vol.28. – No.4. – P.717 – 724.
58. Hagood, N. W. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. / N. W. Hagood, A. von Flotow // *Journal of Sound and Vibration*. – 1991. – Vol.146. – No.2. – P.243 – 268.
59. Lesieutre, G.A. Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. / G.A. Lesieutre // *The Shock and Vibration Digest*. – 1998. – Vol.30. – No.3. – P.187 – 195.



60. Clark, W.W. Vibration control with state-switched piezoelectric materials. / W.W. Clark // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2000. – Vol.11. – No.4. – P.263 – 271.
61. Reza Moheimani, S.O. A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. / S.O. Reza Moheimani // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. – 2003. – Vol.11. No.4. – P.482 – 494.
62. Viana, F.A.C. Multimodal vibration damping through piezoelectric patches and optimal resonant shunt circuits. / F.A.C. Viana, V. Steffen Jr. // *The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. – 2006. – Vol.28. No.3. – P.293 – 310.
63. Lallart, M. Self-powered circuit for broadband, multimodal piezoelectric vibration control. / M. Lallart, E. Lefeuvre, C. Richard, D. Guyomar // *Sensors and Actuators A*. – 2008. – Vol.143. – P.377 – 382.
64. Trindade, M.A. Multimodal passive vibration control of sandwich beams with shunted shear piezoelectric materials. / M.A. Trindade, C.E.B. Maio // *Smart Materials and Structures*. – 2008. – Vol.17. – No.5. – P.055015.
65. Trindade, M.A. Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization. / M.A. Trindade, A. Benjeddou // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2009. – Vol.16. – No.3. – P.210 – 223.
66. Godoy, T.C. Modeling and analysis of laminate composite plates with embedded active-passive piezoelectric networks. / T.C. Godoy, M.A. Trindade // *Journal of Sound and Vibration*. – 2011. – Vol.330. – No.2. – P.194 – 216.
67. Davis, C. L. An actively tuned solid-state vibration absorber using capacitive shunting of piezoelectric stiffness. / C. L. Davis, G. A. Lesieutre // *Journal of Sound and Vibration*. – 2000. – Vol.232. – No.3. – P.601 – 617.
68. Forward, R. L. Electronic damping of orthogonal bending modes in a cylindrical mast—experiment. / R. L. Forward // *Journal of Spacecraft and Rockets*, – 1981. – Vol.18. – No.1. – P.11 – 17.
69. Wu, S. Y. Piezoelectric shunts with parallel R-L circuit for smart structural damping and vibration control. / S. Y. Wu // *Proceedings SPIE Symposium on Smart Structures and Materials – Passive Damping and Isolation*. – 1996. – P.259 – 269.
70. Riordan, R.H.S. Simulated Inductors Using Differential Amplifiers. / R.H.S. Riordan // *Electronics Letters*. – 1967. – Vol.32. – P.50 – 51.

71. van Spengen, W. M. The electromechanical damping of piezo actuator resonances: Theory and practice / W. M. van Spengen // *Sensors and Actuators A: Physical*. – 2022. – Vol.333. – 113300.
72. Yan, B. Shunt Damping Vibration Control Technology: A Review / B. Yan, K. Wang, Z. Hu, C. Wu, X. Zhang // *Applied Sciences*. – 2017. – Vol.7. – P.494.
73. Tofteker, J.F. Optimal piezoelectric resistive–inductive shunt damping of plates with residual mode correction / J.F. Tofteker, A. Benjeddou, J. Høgsberg, S. Krenk // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2018. – Vol.29, No.16. – P.3346 – 3370.
74. Toftekær, J. F. General numerical implementation of a new piezoelectric shunt tuning method based on the effective electromechanical coupling coefficient / J. F. Toftekær, A. Benjeddou, J. Høgsberg // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2020. – Vol. 27. – No.22. – P.1908 – 1922.
75. Berardengo, M. Piezoelectric resonant shunt enhancement by negative capacitances: Optimisation, performance and resonance cancellation / M. Berardengo, S. Manzoni, O. Thomas, M. Vanali // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2018. – Vol.29. – No.12. – P.2581 – 2606.
76. Chomette, B. Modal control based on direct modal parameters estimation / B. Chomette, A. Mamou-Mani // *Journal of Vibration and Control*. – 2018. – Vol.24. – No.12. – P.2389 – 2399.
77. Williams, D. Active vibration control using piezoelectric actuators employing practical components / D. Williams, H. Haddad Khodaparast, S. Jiffri, C. Yang // *Journal of Vibration and Control*. – 2019. – Vol.25. – No.21-22. – P.2784 – 2798.
78. Qiu, Z.C. Active vibration control of a flexible beam using a non-collocated acceleration sensor and piezoelectric patch actuator / Z.C. Qiu, J.D. Han, X.M. Zhang, Y.C. Wang, Z.W. Wu // *Journal of Sound and Vibration*. – 2009. – Vol.326. – No.3-5. – P.438 – 455.
79. Sunar, M. Recent advances in sensing and control of flexible structures via piezoelectric materials technology. / M. Sunar, S.S. Rao // *Applied Mechanics Reviews*. – 1999. – Vol.52. – No.1. – P.1 – 16.
80. Tang, J. Semiactive and active-passive hybrid structural damping treatments via piezoelectric materials / J. Tang, Y. Liu, K.W. Wang // *Shock and Vibration Digest*. – 2000. – Vol.32. – No.3. – P.189 – 200.

81. Benjeddou, A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey // A. Benjeddou // *Computers & Structures*. – 2000. – Vol.76. – No. 1-3. – P.347 – 363.
82. Benjeddou, A. Advances in hybrid active-passive vibration and noise control via piezoelectric and viscoelastic constrained layer treatments / A. Benjeddou // *Journal of Vibration and Control*. – 2001. – Vol.7. – No.4. – P.565 – 602.
83. Trindade, M.A. Hybrid active-passive damping treatments using viscoelastic and piezoelectric materials: Review and Assessment / M.A. Trindade, A. Benjeddou // *Journal of Vibration and Control*. – 2002. – Vol.8. – No.6. – P.699 – 745.
84. Sodano, H.A. A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials / H.A. Sodano, D.J. Inman, G. Park // *The Shock and Vibration Digest*. – 2004. – Vol.36. – No.3. – P.197 – 205.
85. Anton, S.R. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006) / S.R. Anton, H.A. Sodano // *Smart Materials and Structures*. – 2007. – Vol.16. – No.3. – P.R1 – R21.
86. Wang, Y. A survey of control strategies for simultaneous vibration suppression and energy harvesting via piezoceramics / Y. Wang, D.J. Inman // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2012. – Vol.23. – No.18. – P.2021 – 2037.
87. Song, G. Vibration control of civil structures using piezoceramic smart materials: A review. / G. Song, V. Sethi, H-N. Li // *Journal of Engineering Structures*. – 2006. – Vol. 28. – No.11. – P.1513 – 1524.
88. Fisco, N.R. Smart structures: Part I—Active and semi-active control / N.R. Fisco, H. Adeli // *Scientia Iranica Transactions A: Civil Engineering*. – 2011. – Vol.18. – No.3. – P.275 – 284.
89. Fisco, N.R. Smart structures: Part II— Hybrid control systems and control strategies / N.R. Fisco, H. Adeli // *Scientia Iranica Transactions A: Civil Engineering*. – 2011. – Vol.18. – No.3. – P.285 – 295.
90. Viana, F.A.C. Multimodal Vibration Damping through Piezoelectric Patches and Optimal Resonant Shunt Circuits / F.A.C. Viana, V. Steffen Jr. // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. – 2006. – Vol. XXVIII. – No. 3. – P.293 – 310.
91. Casadei, F. Broadband vibration control through periodic arrays of resonant shunts: experimental investigation on plates. / F. Casadei, M. Ruzzene, L. Dozio, K. A. Cunefare // *Smart Materials and Structures*. – 2010. – Vol. 19. – No. 1. – Article ID 015002.

92. Wu, S. Y. Method for multiple mode shunt damping of structural vibration using a single PZT transducer. / S. Y. Wu // Proceedings SPIE Symposium on Smart Structures and Materials – Smart Structures and Intelligent Systems. – 1998. – P.159 – 167.
93. Behrens, S. Current flowing multiple mode piezoelectric shunt dampener. / S. Behrens, S.O.R. Moheimani // Proceedings SPIE Smart Materials and Structures. – 2002. – Paper No. 4697 – 24.
94. Behrens, S. Multiple mode passive piezoelectric shunt dampener / S. Behrens, S.O.R. Moheimani, A.J. Fleming. // Proceedings IFAC Mechatronics. – 2002.
95. Fleming, A. J Adaptive piezoelectric shunt damping / A. J. Fleming, S.O.R. Moheimani // Smart Materials and Structures. – 2003. – Vol.12. – № 1. – P.36 – 48.
96. Vidoli, S. Vibration control in plates by uniformly distributed PZT actuators interconnected via electric networks / S. Vidoli, F. dell’Isola // European Journal of Mechanics/A Solids. – 2001. – Vol. 20. – P.435 – 456.
97. Porfiri, M. Circuit analog of a beam and its application to multimodal vibration damping, using piezoelectric transducers / M. Porfiri, F. dell’Isola, F.M. Frattale Mascioli // International Journal of Circuit Theory and Applications. – 2004. – Vol. 32. – P.167 – 198.
98. dell’Isola, F. Piezoelectromechanical structures: new trends towards the multimodal passive vibration control / F. dell’Isola, E.G. Henneke, M. Porfiri // Proceedings of SPIE Smart Structures and Materials 2003: Damping and Isolation. – 2003. –Vol. 5052. – P.392 – 402.
99. Maurini, C. Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers. / C. Maurini, F. dell’Isola, D. Del Vescovo // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2004. – Vol. 18. – No.5. – P.1243 – 1271.
100. Giorgio, I. Multimode vibration control using several piezoelectric transducers shunted with a multiterminal network. / I. Giorgio, A. Culla, D. Del Vescovo // Archive of Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 79. – No. 9. – P.859 – 879.
101. Gupta, V. Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: a technical review. / V. Gupta, M. Sharma, N. Thakur // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2010. – Vol.21. – No.12. – P.1227.
102. Bachmann, F. Optimum piezoelectric patch positioning: A strain energy–based finite element approach. / F. Bachmann, A.E. Bergamini, P. Ermanni // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2012. – Vol.23. – No.14. – P.1575 – 1591.

103. Rosi, G. Optimization of piezoelectric patch positioning for passive sound radiation control of plates. / G. Rosi, R. Paccapeli, F. Ollivier, J. Pouget // *Journal of Vibration and Control*. – 2012. – Vol.19. – No.5. – P.658 – 673.
104. Ducarne, J. Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction. / J. Ducarne, O.Thomas , J.-F.Deu // *Journal of Sound and Vibration*. – 2012. – Vol.331. – P.3286 – 3303.
105. Venna, S. An Effective Approach for Optimal PZT Vibration Absorber Placement on Composite Structures. / S. Venna, Y.-J. Lin // *Modern Mechanical Engineering*. – 2013. – Vol.3. – No.1. – Paper ID 28250. – P.21 – 26.
106. Sevodina, N.V. The optimal placement of the piezoelectric element in a structure based on the solution of the problem of natural vibrations. / N.V. Sevodina, N.A. Yurlova, D.A. Oshmarin // *Solid State Phenomena*. – 2016. – Vol. 243. – P.67 – 74.
107. Матвееенко, В.П. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации. / В.П. Матвееенко, Д.А. Ошмарин, Н.А. Севодина, Н.А. // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 476 – 485.
108. Иванов, А.С. Обоснование использования эквивалентных схем замещения для оптимизации диссипативных свойств электроупругих тел с внешними электрическими цепями / А.С. Иванов, В.П. Матвееенко, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина, М.А. Юрлов, Н.А. Юрлова // *Известия РАН. Механика Твердого Тела*. – 2016. – № 3. – С. 40 – 54.
109. Matveenko V.P., Sevodina N.V., Yurlova N.A., Oshmarin D.A., Yurlov M.A. and Ivanov A.S. Determination of parameters of the external electric circuits providing maximum damping of vibrations of electroelastic bodies / V.P. Matveenko, N.V. Sevodina, N.A. Yurlova, D.A. Oshmarin, M.A. Yurlov // *Dynamics and Control of Advanced Structures and Machines* (eds. H. Irschik, A. Belyaev, M. Krommer). – 2016. – Switzerland: Springer Nature. – P.93 – 100.
110. Yurlov, M.A. Determination of optimal parameters for a passive RL-circuit by solving the problem on natural vibrations of electroelastic bodies / M.A. Yurlov, D.A. Oshmarin, N.V. Sevodina, N.A. Iurlova // *ECCOMAS Congress 2016 VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering Proceedings*. – 2016. – Vol.1 – P. 1930 – 1939.
111. Matveenko, V. Optimization of dynamic characteristics of smart-systems based on piezoelements / V. Matveenko, N. Sevodina, N. Yurlova, D. Oshmarin, M. Yurlov, A. Ivanov. //

24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Book of papers. – 2016. – P.2963 – 2964.

112. Матвеевко, В.П. Использование эквивалентных электрических схем замещения для анализа динамических процессов в электроупругих системах с внешними электрическими цепями / В.П. Матвеевко, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина, Н.А. Юрлова, М.А. Юрлов // Математическое моделирование в естественных науках. Материалы XXV Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов. – 2016. – т.1. - С.213 – 216

113. Høgsberg, J. Explicit solution format for complex-valued natural frequency of beam with R-shunted piezoelectric laminate transducer / J. Høgsberg, A. Le Cöent // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2013. – Vol 228. – No.1. – P.31 – 44.

114. Høgsberg, J.B. Balanced calibration of resonant piezoelectric RL shunts with quasi-static background flexibility correction / J.B. Høgsberg, S.Krenk // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Vol. 341. – P.16 – 30.

115. Corr, L.R. Comparison of lowfrequency piezoelectric switching shunt techniques for structural damping / L.R. Corr, W.W. Clark // Smart Structures and Materials. – 2002. – Vol.11. – No.3. – P.370 – 376.

116. Davis, C.L. An actively tuned solid-state vibration absorber using capacitive shunting of piezoelectric stiffness / C.L. Davis, G.A. Lesieutre // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – Vol. 232. – No.3. – P.601 – 617.

117. Larson G.D. State switched transducers: A new approach to high-power, lowfrequency, underwater projectors / G.D. Larson, P.H. Rogers, W. Munk // Journal of Acoustical Society of America. – 1998. – Vol. 103. – No.3. – P.1428 – 1441.

118. Badel, A. Finite element and simple lumped modeling for flexural nonlinear semi-passive damping / A. Badel, M. Lagache, D. Guyomar // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2007. – Vol. 18. – No.7. – P.727 – 742.

119. Cunefare, K.A. State-switched absorber for vibration control of point-excited beams / K.A. Cunefare // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2002. – Vol. 13. – No.2 – 3. – P.97 – 105.

120. Niederberger, D. Adaptive multi-mode resonant piezoelectric shunt damping / D. Niederberger, A. Fleming, S.O.R. Moheimani, M. Morari // Smart Materials and Structures. – 2004. – Vol. 13. – No.5. – P.1025 – 1035.

121. Lallart, M. Blind switch damping (BSD): A self-adaptive semi-active damping technique / M. Lallart, S. Harari, L. Petit // *Journal of Sound and Vibration*. – 2009. – Vol. 328. – No.1 – 2. – P.29 – 41.
122. Guyomar, D. Damping behavior of semi-passive vibration control using shunted piezoelectric materials / Guyomar, D., Richard, C., and Mohammadi, S. // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2008. – Vol. 19. – No.8. – P.977 – 985.
123. Ji, H. Semiactive vibration control of a composite beam using an adaptive SSDV approach / H. Ji, J. Qiu, A. Badel, K. Zhu // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2009. – Vol. 20. – No.4. – P.401-412.
124. Ji, H. Two-mode vibration control of a beam using nonlinear synchronized switching damping based on the maximization of converted energy / H. Ji, J. Qiu, A. Badel, K. Zhu // *Journal of Sound and Vibration*. – 2010. – Vol. 329. – No.14. – P.2751 – 2767.
125. Erturk, A. Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters / A. Erturk, D.J. Inman // *Smart Materials and Structures*. – 2008. – Vol. 17. – No.6. – Art.ID 065016.
126. Allik, H. Finite Element method for Piezoelectric Vibration / H. Allik, T.J.R. Hughes // *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. – 1970. – Vol.2. – P.151 – 157.
127. Mackerle, J. Smart materials and structures—a finite-element approach: a bibliography (1986–1997) / J. Mackerle // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. – 1998. – №6. – p.293–334.
128. Mackerle, J. Smart materials and structures — a finite element approach — an addendum: a bibliography (1997–2002) / J. Mackerle // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. – 2003. – № 11. – p. 707–744.
129. Filipek, R. Active and passive structural acoustic control of the smart beam / R. Filipek, J. Wiciak // *The European Physical Journal Special Topics*. – 2008. – Vol. 154. – P.57 – 63.
130. Kajiwara, I. Vibration Control of Hard Disk Drive with Smart Structure Technology for Improving Servo Performance / I. Kajiwara, T.Uchiyama, T.Arisaka // *Motion and Vibration Control (H. Ulbrich and L. Ginzinger eds.)*. – 2009. – New York: Springer, Science and Business Media. – P.165 – 176.
131. Nguyen, C.-H. A Comparison of Dynamic Piezoactuation of Fiber-based Actuators and Conventional PZT Patches / C.-H. Nguyen, X. Kornmann // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2006. – Vol.17. – № 45.

132. Agneni, A. Shunted piezoelectric patches in elastic and aeroelastic vibrations / A. Agneni, F. Mastroddi, G.M. Polli // *Computers and Structures*. – 2003. – Vol. 81. – p. 91 – 105.
133. Poizat, C. Finite element modelling of passive damping with resistively shunted piezocomposites / C. Poizat, M. Sester // *Computational Materials Science*. – 2000. – №19. – P. 183 – 188.
134. Zouari, W. A piezoelectric 3D hexahedral curvilinear finite element based on the space fiber rotation concept / W. Zouari, R. Ayad, T. Ben Zineb, A. Benjeddou // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2012. – Vol. 90. – P.87 – 115.
135. Kögl, M. A family of piezoelectric MITC plate elements. / M. Kögl, M.L. Bucalem // *Computers and Structures*. – 2005. – Vol. 83. – P.1277 – 1297.
136. Bernadou, M. Modelization and numerical approximation of piezoelectric thin shells. part II: approximation by finite element methods and numerical experiments. / M. Bernadou, C. Haenel // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2003. – Vol.192. – P.4045 – 4073.
137. Zouari, W. A FSDT-MITC piezoelectric shell finite element with ferroelectric non-linearity. / W. Zouari, T. Ben Zineb, A. Benjeddou // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2009. – Vol.20. – P.2055 – 2075.
138. Garcia Lage, R. Modelling of piezolaminated plates using layerwise mixed finite elements / R. Garcia Lage, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, J.N. Reddy // *Computers and Structures*. – 2004. – Vol. 82. – P.1849 – 1863.
139. Thomas, O. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite elements formulation and electromechanical couplings coefficients. / O. Thomas, J.-F. Deü, J. Ducarne // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2009. – Vol.80. – No.2. – P.235 – 268.
140. Sze, K.Y. A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part II - smart structure modelling. / K.Y. Sze, L.Q. Yao, S. Yi // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2000. – Vol. 48. – P.565 – 582.
141. Klinkel, S. A piezoelectric solid shell element based on a mixed variational formulation for geometrically linear and nonlinear applications. / S. Klinkel, W. Wagner // *Computers and Structures*. – 2008. – Vol. 86. – P.38 – 46.
142. Zouari, W. A piezoelectric 3D hexahedral curvilinear finite element based on the space fiber rotation concept / W. Zouari, R. Ayad, T. Ben Zineb, A. Benjeddou // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2012. – Vol. 90. – P.87 – 115.



143. Kulikov, G.M. Exact geometry piezoelectric solid-shell element based on the 7-parameter model / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2011. – Vol.18. – P.133 – 146.
144. Kulikov, G.M. A new approach to three-dimensional exact solutions for functionally graded piezoelectric laminated plates / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Composite Structures*. – 2013. – Vol.106. – P.33 – 46.
145. Ha, S.K. Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoelectric sensors and actuators. / S.K. Ha, C. Keilers, F.K. Chang // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. – 1992. – Vol.30. – P.772 – 780.
146. Kim, J. Finite element modeling of structures including piezoelectric active devices. / J. Kim, V.V. Varadan, V.K. Varadan // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1997. – Vol.40. – P.817 – 832.
147. McCalla, J. *Fundamentals of Computer-Aided Circuit Simulation*. / McCalla, J. – Netherlands: Kluwer Academic Publishers. – 1988.
148. Venter, G.S. Passive and active strategies using embedded piezoelectric layers to improve the stability limit in turning/boring operations. / G.S. Venter, L.M.P. Silva, M.B. Carneiro // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. – 2017. – Vol.89. – No.9-12. – P.2789 – 2801.
149. Schoeftner, J. Single point vibration control for a passive piezoelectric Bernoulli–Euler beam subjected to spatially varying harmonic loads / J. Schoeftner, M. Krommer // *Acta Mechanica*. – 2012. – Vol.223. – No.9. – P.1983 – 1998.
150. Benjeddou, A. Modal effective electromechanical coupling approximate evaluations and simplified analyses: numerical and experimental assessments. / A. Benjeddou // *Acta Mechanica*. – Vol.225. – No.10. – P.2721 – 2742.
151. da Silva, L.P. An efficient finite element approach for reduction of structural vibration and acoustic radiation by passive shunted piezoelectric systems. / L.P. da Silva, J.-F. Deü, W. Larbi, M.A. Trindade // *10th World Congress on Computational Mechanics*. – 2014. – Vol.1. – No.1. – P.1 – 20.
152. Benjeddou, A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. / A. Benjeddou // *Computers and Structures*. – 2000. – Vol.76. – P.347 – 363.
153. Washizu, K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. / K. Washizu – London: Pergamon Press. – 1982.

154. Роговой А.А. Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Часть I. Основные соотношения механики сплошных сред. / А.А. Роговой. – Пермь: УрО РАН. – 2020.
155. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. / К. Трусделл. – Москва: Мир. – 1975. – 592с.
156. Карнаухов, В.Г. Электротермовязкоупругость. / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. – Киев: Наукова думка. – 1988. – 319 с.
157. Шульга, Н.А. Колебания пьезоэлектрических тел. / Н.А. Шульга, А.М. Болкисев. – Киев: Наукова думка. – 1990. – 228 с.
158. Ильюшин, А.А., Основы математической теории термовязкоупругости. / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – М: Наука. – 1970. – 280 с.
159. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела. / С.Г. Лехницкий – М.: Наука. – 1977. – 415 с.
160. Лурье, А.И. Теория упругости. / А.И. Лурье – М.: Наука. – 1970. – 940 с.
161. Трояновский, И.Е. О построении периодических решений интегродифференциальных уравнений вязкоупругости / И.Е. Трояновский // Механика полимеров. – 1974. – №3.
162. Стрелков, С.П. Введение в теорию колебаний. / С.П. Стрелков. – М.: Наука. – 1964. – 440 с.
163. Попов, В.П. Основы теории цепей: учебник для вузов. / В.П. Попов. – М.: Высшая школа. – 1985. – 496 с.
164. Манаев, Е.И. Основы радиоэлектроники. / Е.И. Манаев. – М.: Радио и связь. – 1985. – 504с.
165. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике (пер. с английского, ред. Победря Б.Е.) / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975.
166. Ansys 17.2 Documentation. – SAS IP, Inc. – 2016.
167. Клигман, Е.П. Определение собственных частот колебаний кусочно-однородных вязкоупругих тел с использованием пакета ANSYS / Е.П. Клигман, В.П. Матвеенко, Н.В. Севодина. // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т.13. – №2. – С.46 – 54.
168. <http://math.nist.gov/MatrixMarket/formats.html>
169. Матвеенко, В.П. Приложения метода Мюллера и принципа аргумента к задачам на собственные значения в механике деформируемого твердого тела / В.П.

Матвеевко, М.А. Севодин, Н.В. Севодина // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т.7. – №3. – С.331 – 336.

170. Юрлова, Н.А. Численный алгоритм поиска компоновок электроупругих тел с внешними электрическими цепями для получения наилучших демпфирующих характеристик / Н.А. Юрлова, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина, М.А. Юрлов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – №3. – С. 108 – 124.

171. Улитко, А.Ф. К теории электромеханического преобразования энергии в неравномерно деформируемых пьезокерамических телах. / А.Ф. Улитко // Прикладная механика. – 1977. – Т.13. – № 10. – С.115 – 123.

172. Nye, J.F. Physical properties of crystals. / J.F. Nye. – Oxford: Claridon press. – 1964.

173. Mason, W.P. Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics. / W.P. Mason. – New Jersey: Princeton. – 1950.

174. Берлинкур, Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика (под ред. У.Мэзона). – 1966. – т.1. – С.204 – 326.

175. Wang, D. Through-thickness piezoresistivity in a carbon fiber polymer-matrix structural composite for electricalresistance-based through-thickness strain sensing / D. Wang, D.D.L. Chung. // Carbon. – 2013. – Vol. 60. – P.129 –138.

176. Xi, X. Piezoelectric and piezoresistive behavior of unmodified carbon fiber. / X. Xi, D.D.L. Chung // Carbon. –2019. – Vol.145. – P.452 – 461.

177. Tallman, T.N. A computational exploration of the effect of alignment and aspect ratio on alternating current conductivity in carbon nanofiber–modified epoxy. / T.N. Tallman, H. Hassan. // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2020. – vol.31. – No.5. – P.756-770.

178. Alemour, B. Review of Electrical Properties of Graphene Conductive Composites / B. Alemour, M.H. Yaacob, H.N. Lim // International Journal of Nanoelectronics and Materials. – 2018. – Vol.11. – № 4. – P.371 – 398.

179. Matveenko, V.P. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations. / V.P. Matveenko, N.A. Iurlova, D.A. Oshmarin, N.V. Sevodina, M.A. Iurlov. // International Journal of Smart and Nano Materials. – 2018. – Vol.9. – No.2. – P.135 – 149.