

«ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД УРО РАН» – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
НАУКИ ПЕРМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Шарифулин Вадим Альбертович

**КОНВЕКЦИЯ В ЖИДКОСТИ СО СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ
ПЛОТНОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ЗАДАННОМ
ПОТОКЕ ТЕПЛА**

1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор
Любимова Татьяна Петровна

Пермь 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1. Обзор литературы.....	10
1.1 Уравнение состояния	11
1.2 Конвективные факела от локальных источников тепла.....	15
1.3 Конвекция в слое с температурной инверсией плотности.....	23
1.4 Проникающая конвекция в полостях различной формы	30
1.5 Выводы	31
Глава 2. Конвективные факела в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры	33
2.1 Плоский конвективный факел.....	33
2.2 Осесимметричный конвективный факел	52
2.3 Выводы	65
Глава 3. Возникновение проникающей конвекции в слое с заданным тепловым потоком.....	66
3.1 Определяющие уравнения и состояние механического равновесия... 66	66
3.2 Постановка задачи об устойчивости механического равновесия	68
3.3 Длинноволновая неустойчивость	73
3.4 Ячеистая неустойчивость	83
3.5 Выводы	90
Глава 4. Надкритические течения в прямоугольной полости с заданным тепловым потоком.....	91
4.1 Конвекция в жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры	92
4.2 Проникающая конвекция в жидкости с инверсией плотности.....	111
4.3 Выводы	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	129
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	132

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Процессы теплообмена в вязких несжимаемых жидкостях, заполняющих замкнутые полости, представляют как теоретический, так и практический интерес. Жидкость при этом, как правило, нагревается или охлаждается через границы полости. Возникающее благодаря этому неравномерное распределение температуры приводит к перепадам плотности, которые при наличии гравитации благодаря подъемной силе вызывают течения, называемые свободной тепловой (естественной) конвекцией. Естественная конвекция зачастую играет ключевую роль в теплообмене в естественных и искусственных водоемах, шахтных выработках, корпусах электронных и технических устройств, салонах и контейнерах транспортных средств.

В большинстве теоретических и экспериментальных исследований тепловой конвекции полагают, что зависимость плотности жидкости от температуры линейна. Главной особенностью диссертационной работы является то, что в большинстве рассмотренных задач температурная зависимость плотности от температуры полагалась нелинейной степенной. Примером жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры является самая распространенная на поверхности Земли жидкость – вода. Во многих геофизических и технических приложениях ее температура находится вблизи температуры максимума плотности (4°C), так называемой температуры инверсии плотности. При этом в области ниже температуры инверсии зависимость плотности от температуры аномальная, т.е. при увеличении температуры наблюдается не уменьшение, как для большинства других жидкостей и газов, а увеличение плотности. В отечественной и зарубежной литературе имеется большое число работ, относящихся к различным аспектам конвекции воды и некоторых других жидкостей со степенной зависимостью плотности от температуры в безграничной среде от

локального источника тепла, в плоских слоях и др. В них показано, что степенная зависимость плотности от температуры, особенно при наличии температурной инверсии плотности, приводит к новым типам неустойчивости, усложняет вихревую структуру развитых нелинейных режимов конвективных течений, меняет структуру течения от локальных источников тепла.

Другой особенностью рассмотренных в диссертации задач является заданный вертикальный тепловой поток через слой жидкости. Рассматриваются два предельных случая подогрева снизу – локальный и равномерно распределенный. В первом случае в объеме жидкости с произвольной степенной зависимостью плотности от температуры располагается локальный источник тепла с постоянной мощностью, вызывающий направленный вверх поток жидкости (конвективный факел). Для таких плоских и осесимметричных конвективных факелов в случае жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры в приближении пограничного слоя ранее были получены точные аналитические решения. Во втором случае вертикальный поток тепла через слой или замкнутую полость обеспечивается заданием его постоянного значения на нижней и верхней границах. Такие тепловые условия широко распространены в важных приложениях, но вопросы конвективной устойчивости при их реализации гораздо менее исследованы, чем для случая заданной температуры на границах.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию тепловой конвекции жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры при подогреве снизу с помощью локального или распределенного источника тепла заданной мощности.

Цель работы:

Установить закономерности возникновения и развития тепловой конвекции в жидкостях со степенной зависимостью плотности от

температуры в условиях локального и распределенного тепловых потоков на границах.

Для достижения этой цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Аналитически в приближении пограничного слоя определить параметры конвективного факела от линейного источника тепла заданной мощности в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры, когда показателем в этой зависимости является произвольное действительное число.
2. Аналитически в приближении пограничного слоя определить параметры конвективного факела от точечного источника тепла заданной мощности в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры, когда показателем в этой зависимости является произвольное действительное число.
3. Аналитически исследовать линейную устойчивость механического равновесия жидкости с температурной инверсией плотности в плоском горизонтальном слое с заданным тепловым потоком на твердой нижней и свободной недеформируемой верхней границах относительно длинноволновых возмущений.
4. Численно исследовать устойчивость механического равновесия жидкости с температурной инверсией плотности в плоском горизонтальном слое с заданным тепловым потоком на твердой нижней и свободной недеформируемой верхней границах относительно возмущений с конечной длиной волны.
5. Определить влияние конечности длины горизонтальной прямоугольной полости на возникновение неустойчивости и плоские надкритические режимы конвекции жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры в условиях заданного теплового потока на горизонтальных границах.
6. Исследовать влияние положения точки инверсии на устойчивость механического равновесия и надкритические режимы конвекции в

жидкости с температурной инверсией плотности в прямоугольной горизонтальной полости с аспектным отношением, равным двум.

Методология и методы исследования. Изучение конвективных факелов проводилось аналитически с использованием приближения пограничного слоя. При исследовании длинноволновой и ячеистой неустойчивости использовались уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска с учетом квадратичной зависимости плотности от температуры. Линейная задача устойчивости механического равновесия относительно длинноволновых возмущений решалась аналитически методом разложения по малому параметру, относительно ячеистых – численно методом пристрелки. Решение нелинейных задач производилось численно методом конечных разностей в переменных функция тока – завихренность.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В приближении пограничного слоя получены новые точные решения задач о конвективном факеле жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры над точечным и линейным источниками тепла для произвольного показателя температурной инверсии плотности и избранных значений числа Прандтля.
2. Ячеистая неустойчивость слоя жидкости с температурной инверсией плотности с заданным тепловым потоком на свободной верхней и твердой нижней границах, невозможная в отсутствие инверсии плотности, существует, если неустойчиво стратифицированный слой достаточно тонок. Определены условия устойчивости равновесия по отношению к ячеистым возмущениям.
3. Гистерезис между одно-, двух- и трехвихревыми надкритическими движениями в прямоугольной полости, заполненной жидкостью с линейной зависимостью плотности от температуры, существует, если полость достаточно вытянута в горизонтальном направлении.

4. Гистерезис между ячейстыми многовихревыми режимами в прямоугольной полости с жидкостью с температурной инверсией плотности существует, если неустойчиво стратифицированный слой достаточно тонок.

Научная новизна работы состоит в том, что в ней впервые:

1. В приближении пограничного слоя найдены новые точные решения задач о конвективном факеле над линейным и точечным источниками тепла в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры при фиксированных значениях числа Прандтля и произвольном степенном показателе.
2. Корректно решена задача о возникновении естественной конвекции в горизонтальном слое жидкости с температурной инверсией плотности при постоянном тепловом потоке на твердой нижней и свободной верхней границах, аналитически определены границы длинноволновой неустойчивости. Численно обнаружена и исследована область ячейстой неустойчивости, невозможная в жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры.
3. Численно определено влияние конечности длины горизонтальной прямоугольной полости на возникновение неустойчивости и плоские надкритические режимы конвекции жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры в условиях заданного теплового потока на твердой нижней и свободной верхней границах.
4. Определено влияние положения точки инверсии на устойчивость механического равновесия и надкритические режимы конвекции жидкости с тепловой инверсией плотности в прямоугольной горизонтальной полости с аспектным отношением, равным двум.

Достоверность результатов обусловлена использованием апробированных подходов механики сплошных сред при разработке математических моделей и согласием результатов в предельных случаях с экспериментальными и

теоретическими работами других авторов. Проведен анализ сходимости результатов численных расчетов при изменении шага расчетной сетки.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты важны для понимания особенностей проникающей конвекции в прудах, озерах, недрах планет и звезд. Они могут быть использованы при проектировании технических устройств, использующих жидкости с температурной инверсией плотности, такие как талая вода, жидкий висмут, жидкий гелий и парогазовая смесь кислорода и циклогексана. Полученные точные решения могут быть использованы при тестировании численных алгоритмов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- 10-й Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках», Пермь, октябрь, 2001.
- International conference “Advanced problems in thermal convection”, Perm, November, 2003.
- XXXVI Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics” St. Peterburg (Repino), July, 2008.
- Пермских гидродинамических чтений имени профессоров Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова, декабрь 2014, декабрь 2015, ноябрь 2019.
- XX Зимней школе по механике сплошных сред. Пермь. 13–16 февраля 2017 г.
- Пермском гидродинамическом семинаре имени Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова, июнь 2022.

Часть исследований выполнена в рамках совместного российско-германского проекта 20-51-12010 ННИО_а и гранта № FSNM-2020-0026 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

Публикации. Основные результаты представлены в 18 публикациях [121-138], включая 7 статей в журналах из перечня ВАК [132-138], которые также проиндексированы в международных базах Web of Science и Scopus.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, она содержит 145 страниц, 40 рисунков, 1 таблицу, библиографию из 138 наименований.

Личный вклад автора. Автором диссертации проведены все аналитические и численные расчеты, написаны все вычислительные программы. Постановка задач, обсуждение и анализ результатов осуществлены совместно с научным руководителем Т.П. Любимовой и соавтором публикаций Д.В. Любимовым.

Глава 1. Обзор литературы

Свободная тепловая конвекция вязкой несжимаемой жидкости является предметом интенсивного теоретического и экспериментального изучения в связи с ее важностью для технических, геофизических и астрофизических приложений. Современное состояние теории свободной тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры отражено в большом количестве монографий и обзоров. Обзоры исследований по конвекции жидкости с нелинейной зависимостью плотности от температуры можно найти лишь в отдельных параграфах этих работ.

В начале главы обсуждаются различные, наиболее распространенные в литературе, формы записи уравнения состояния жидкости с нелинейной зависимостью плотности от температуры, обсуждается применимость приближения Буссинеска для описания конвекции в такой жидкости. Далее анализируются работы, наиболее близкие к теме диссертации. Основное внимание уделяется задачам о конвективных факелах от точечного и линейного локальных источников тепла и задаче о возникновении конвекции в бесконечном горизонтальном плоском слое жидкости с заданным вертикальным потоком тепла на его границах.

В обзоре публикаций по конвективным факелам рассматриваются работы, как при наличии, так и в отсутствие инверсии плотности.

Задаче о конвекции в бесконечном плоском слое в отсутствие инверсии плотности посвящено значительное количество монографий и обзорных работ. В настоящем обзоре основное внимание уделяется работам о возникновении конвекции в слое с постоянным тепловым потоком на границах.

Приведен также краткий обзор работ, посвященных расчетам нелинейных режимов конвекции жидкости с температурной инверсией плотности в замкнутых полостях различной формы.

1.1 Уравнение состояния

При исследовании тепловой конвекции для широкого круга задач изменения плотности с температурой можно полагать малыми. При этом зависимостью плотности от давления, как правило, пренебрегают, а температурную зависимость плотности жидкостей и газов описывают линейной убывающей функцией [1–13]:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad (1.1)$$

Здесь β – коэффициент объемного расширения, ρ_0 – плотность жидкости или газа при температуре T_0 . В качестве температуры T_0 можно использовать среднюю температуру жидкости, температуру одной из стенок полости и т.п.

Для ряда жидкостей имеются интервалы температур, в которых температурная зависимость плотности аномальна. Это явление называется температурной инверсией плотности, а значение температуры T_i , при котором достигается максимум плотности, – температурой инверсии. Температурной инверсией плотности обладает, например, жидкий гелий [14,15]. Жидкий висмут [29] также демонстрирует явление инверсии плотности при температуре, близкой к температуре плавления. Имеются указания на то, что конвекция в мантии Земли происходит в условиях температурной инверсии плотности [30]. Температурная инверсия плотности наблюдается также в парогазовой смеси кислорода и циклогексана [119,120].

Особая актуальность изучения конвекции при наличии инверсии плотности обусловлена тем, что этим свойством обладает самая распространенная на поверхности Земли жидкость, – вода. В широко распространенных условиях, при стандартном давлении (10^5 Па) и температуре от 15°C до 100°C , зависимость плотности от температуры хорошо описывается формулой (1.1), а при том же давлении и температурах от 0°C до 15°C , зависимость плотности от температуры существенно нелинейна. Так, для нормального атмосферного давления при $T_i = 4.0^\circ\text{C}$ плотность пресной воды H_2O максимальна, поэтому в области температур

$0^{\circ}\text{C} < T < 4.0^{\circ}\text{C}$ плотность воды с ростом температуры растет. Заметим, что температура инверсии тяжелой воды D_2O почти на восемь градусов выше и составляет 11°C [26]. Наличие инверсии плотности воды является важнейшим фактором, во многом определяющим климат Земли [16]. Вода при высоких давлениях, характерных для океанского дна, может иметь кубическую зависимость плотности от температуры [7].

Нелинейную зависимость плотности воды от температуры Веронис (Veronis G.) [32] предложил аппроксимировать простой квадратичной формулой. В том же 1963 году Эклунд (Eklund H.) [33] независимо показал, что при нормальных условиях удельный объем воды в интервале от нуля до восьми градусов хорошо описывается квадратичной зависимостью от температуры. Квадратичная зависимость плотности от температуры была независимо от Верониса и Эклунда предложена и Гореном (Goren S.L.) [34]. В современных обозначениях она имеет вид:

$$\rho = \rho_m \left(1 - \alpha_2 (T - T_i)^2 \right), \quad (1.2)$$

где $\alpha_2 = 0.8 \cdot 10^{-5} (\text{C})^{-2}$, $T_i = 4.0^{\circ}\text{C}$, а ρ_m плотность воды в точке инверсии.

В литературе имеются различные обобщения формулы (1.2). Так, например, в [52,53] для увеличения интервала аппроксимации было предложено добавить кубический член. Разложение плотности вплоть до пятой степени температуры использовалось в работе Ларге и Андерека (Large E., Andereck C. D.) [54].

Геххарт и Молендорф (Gebhart V., Mollendorf J.C.) [35] предложили другое соотношение, хорошо описывающее зависимость плотности от температуры как для пресной, так и для соленой воды при различных давлениях:

$$\rho = \rho_m (1 - \alpha_{\gamma} (T - T_i)^{\gamma}). \quad (1.3)$$

Случаю чистой воды при атмосферном давлении соответствуют $T_i = 4.0^{\circ}\text{C}$, $\alpha_{\gamma} = 9.3 \cdot 10^{-6} (\text{C})^{-\gamma}$ и $\gamma = 1.9$.

Для рассмотрения конвекции в относительно толстом слое воды (порядка сотен метров), например, в озере Байкал, как показала В.Б. Бекежанова, необходимо вводить в уравнение состояния член с давлением [38-39]. Наиболее точная полиномиальная аппроксимация плотности воды при наличии солености и для широкого интервала давлений получена усилиями многих авторов и называется, – «Международное уравнение состояния морской воды» EOS 80 [36]. Отклонения EOS 80 от экспериментальных данных для плотности чистой и морской воды при условиях, характерных для океана, не превышают $3 \cdot 10^{-6} \text{ g / cm}^3$.

Сравнение параболы (1.2) и степенной зависимости (1.3) с формулой EOS 80 показывает, что формула Гебхарта и Молендорфа (1.3) дает отклонения плотности от EOS 80 в интервале от 0°C до 18°C менее 10^{-5} g / cm^3 , а плотность, заданная квадратичной аппроксимацией Верониса (1.2), в интервале от 1°C до 10°C совпадает с EOS 80 с такой же точностью.

В исследованиях, представленных в настоящей работе, используются рассмотренные выше квадратичная (1.2) и степенная (1.3) аппроксимации зависимости плотности от температуры.

Приближение Буссинеска. Причиной возникновения тепловой конвекции является зависимость плотности жидкости или газа от температуры. Для широкого круга приложений можно полагать, что температурные изменения плотности малы и их нужно учитывать только в члене с подъемной силой. В этом случае вывод уравнений тепловой конвекции из уравнения Навье-Стокса; дополненного уравнениями баланса (или переноса) тепла и неразрывности и уравнением состояния приведен во многих монографиях, см., например, [1–13,19,20,28]. Получающаяся в результате система нелинейных уравнений в частных производных называется уравнениями тепловой конвекции в приближении Буссинеска и может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} - g \frac{\rho(T)}{\rho_0} \vec{n}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T &= \chi \Delta T, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь \vec{n} – единичный вектор, направленный вверх, ν и χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, соответственно.

В литературе имеется неоднозначность в толковании термина “приближение Буссинеска”, связанная с тем, что уравнения конвекции были получены Ж. Буссинеском лишь для случая убывающей линейной зависимости плотности жидкости от температуры (1.1). Так, например, Моллендорф и Джен (Mollendorf J.C., Jahn K.H.) [73] говорят о двух половинах приближения Буссинеска, понимая под первой указанную выше малость изменений плотности, а под второй линейность зависимости плотности от температуры. В монографии Гебхарта с соавторами (Gebhart V. et al.) [3] приближением Буссинеска называют лишь уравнения для случая линейной зависимости плотности от температуры. В отечественной литературе приближением Буссинеска принято называть все приближения, в которых изменения плотности учитываются лишь в члене с подъемной силой, который при этом может содержать не только температуру, но и, например, давление [38–39], зависящее от времени ускорение свободного падения [40] и др. [5]. В дальнейшем мы будем придерживаться именно такой интерпретации термина “приближение Буссинеска”.

Уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска (1.4) с различными зависимостями плотности от температуры, начиная с работы Верониса (Veronis G.) [32], широко используются при теоретическом исследовании конвекции воды в окрестности температуры инверсии $T_i = 4.0^\circ\text{C}$.

1.2 Конвективные факела от локальных источников тепла

В приложениях распространены ситуации, когда размеры источника тепла малы в сравнении с объемом, где протекает процесс тепловой конвекции. Течение жидкости или газа над источником тепла на таких расстояниях, где форма нагретого тела перестает играть роль и источник тепла можно считать линейным или точечным называют свободной конвективной струей [19]. Наряду с этим термином в переводной русскоязычной литературе [3] и публикациях Пермской гидродинамической школы используется термин “конвективный факел” [41-44]. Все больше распространяется для обозначения развивающегося конвективного факела термин “плюм” (см., например, [44-51]), являющийся русской транскрипцией английского слова “plume”. Этот термин связан с геофизическими приложениями теории тепловой конвекции от локального источника тепла. В настоящей работе мы будем придерживаться термина “конвективный факел”.

Исследования конвективных факелов были начаты Я.Б. Зельдовичем [31]. Им были получены общие асимптотические формулы, описывающие зависимости скорости и температуры в факеле от расстояния до источника тепла и теплофизических свойств среды. В дальнейшем усилия исследователей теоретиков сконцентрировались на получении полей скорости и температуры для факелов от двух типов источника тепла, – линейного и точечного. Обзор работ по ламинарным факелам от таких источников тепла содержится в монографии Гебхарта (Gebhart В.) и его коллег [3]. В этой же монографии проведен сравнительный анализ теоретических и экспериментальных исследований конвективных факелов, как свободных, так и при наличии различных осложняющих факторов, таких как наличие твердой стенки, заданный вертикальный поток, пористость среды и т.п.

В настоящем обзоре основное внимание уделяется обсуждению работ по аналитическому исследованию ламинарных свободноконвективных факелов от бесконечного горизонтального линейного (горизонтальная нить)

и точечного источников тепла и полученным в этих случаях точным решениям.

Линейный источник тепла. Рассмотрим ламинарный конвективный факел, возникающий над источником тепла, имеющим форму бесконечной горизонтальной линии с постоянной мощностью q_l , отнесенной к единице длины. Для описания этого течения Йи (C.–S. Yih) [55] использовал приближение пограничного слоя и путем автомодельного преобразования получил систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая система автомодельных обыкновенных дифференциальных уравнений также, независимо от Йи (C.–S. Yih), была получена в работах Фуджи (Fujii T.) [58, 59] и Бранда и Лэйя (Brand R.S., Lahey F.J.) [60]. По нашему мнению, наиболее ясное, детальное и исчерпывающее исследование задачи было проведено в работе [60]. Приведем, следуя этой работе, процедуру сведения сложной краевой задачи для системы нелинейных уравнений в частных производных к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения тепловой конвекции (1.4) в приближении пограничного слоя применительно к факелу от линейного источника тепла приобретают вид:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g\beta T_\infty \theta, \\ \text{Pr} \left(v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= v \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где v_x и v_y – компоненты скорости, ϑ – безразмерное нормированное отклонение температуры от значения температуры T_∞ при $y \rightarrow \infty$:

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5) получаются из уравнений тепловой конвекции (1.4) путем пренебрежения давлением и использованием допущения о малости вторых производных компонент скорости и температуры по вертикальной координате. В соответствии с приближением пограничного слоя решение уравнений (1.5) хорошо аппроксимирует решение полных уравнений тепловой конвекции (1.4) вдали от источника тепла, когда расстояние до источника велико в сравнении с толщиной пограничного слоя.

На плоскости симметрии и вдали от нее должны выполняться следующие условия:

$$y=0: \quad v_y = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0; \quad (1.7)$$

$$y=\infty: \quad u = \theta = 0. \quad (1.8)$$

Задание граничных условий на горизонтальной оси $x=0$ и при $x \rightarrow \infty$ не является необходимым, так как применение приближения пограничного слоя понижает порядок системы уравнений, поэтому условия (1.7)–(1.8) позволяют получить решение для любого $x \geq 0$.

Уравнения (1.5) допускают автомодельное преобразование, сводящее систему нелинейных уравнений в частных производных к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f''' + \frac{3}{5} f f'' - \frac{1}{5} (f')^2 + \tau = 0, \quad (1.9)$$

$$\tau' + \frac{3}{5} \text{Pr} f \tau = 0. \quad (1.10)$$

Граничные условия:

$$f(0) = f''(0) = \tau'(0) = 0, \quad (1.11)$$

$$f'(\infty) = \tau(\infty) = 0. \quad (1.12)$$

Задача (1.9)–(1.12) может быть решена численно стандартными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений или

аналитически методом сращиваемых асимптотических разложений. Результаты таких исследований приведены в монографии [3].

Из (1.9) видно, что нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для автомодельной переменной f содержит два нелинейных члена (квадрат первой производной $(f')^2$ и произведение ff'' , содержащее вторую производную). Такого типа нелинейные члены характерны для плоских задач, решаемых в приближении пограничного слоя, – задаче Блазиуса об обтекании плоской пластины [25], задаче Польшаузена о конвекции у плоской вертикальной стенки [19], течения около клина [24].

Для двух значений числа Прандтля $Pr = 2$ и $Pr = \frac{5}{9}$ задача (1.9)–(1.12) может быть решена точно. Автомодельные функции $f(\eta)$ и $\tau(\eta)$ этих решений имеют вид:

$$Pr = 2, \quad f = \tanh\left(\frac{3}{10}\eta\right), \quad \tau = \frac{9}{125}\operatorname{sech}^4\left(\frac{3}{10}\eta\right), \quad (1.13)$$

$$Pr = \frac{5}{9} \quad f = \tanh\left(\frac{1}{6}\eta\right) \quad \tau = \frac{2}{3375}\operatorname{sech}^4\left(\frac{1}{6}\eta\right). \quad (1.14)$$

Точное решение для значения числа Прандтля $Pr = 2$ получено в работах Йи (C.–S. Yih) [55] и Фуджи (T. Fujii) [58] раньше, чем в кратко изложенной здесь работе Бранда и Лэя (R.S. Brand, F.J. Lahey) [60]. Точное решение для $Pr = 5/9$, близкого к значению числа Прандтля $Pr = 0.7$ [8] для воздуха, получено впервые в [60]. Хотя жидкостей и газов со значениями числа Прандтля $Pr = 2$ и $Pr = 5/9$ не существует, точные решения (1.13) – (1.14) играют важную роль в теории тепловой конвекции [3].

В описанных выше работах используется линейная зависимость плотности от температуры (1.1), характерная для большинства газов и жидкостей.

Исследование ламинарного факела от линейного источника тепла в жидкости с инверсией плотности методами теории пограничного слоя

провели Моллендорф с соавторами (Mollendorf J.C. et al.) [37]. Для аппроксимации зависимости плотности от температуры была использована степенная зависимость (1.3). Показано, что в случае, когда температура жидкости вдали от центральной плоскости факела равна температуре инверсии, краевая задача для системы уравнений Буссинеска может быть сведена к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f''' - \frac{2-\gamma}{4+\gamma}(f')^2 + \frac{3}{4+\gamma}ff'' + \tau = 0, \quad (1.15)$$

$$\tau' + \frac{3\gamma}{4+\gamma}\text{Pr} f\tau = 0.$$

Граничные условия записываются в виде

$$f = f'' = \tau' = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad (1.16)$$

$$f' \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty.$$

В предельном случае $\gamma = 1$ задача (1.15), (1.16) переходит в рассмотренную выше задачу (1.9) – (1.12). Исследование этой системы проведено в [37] численно для $\gamma = 1.9$.

Численное исследование конвективного факела над линейным локальным источником тепла с учетом упомянутого выше «Международного уравнения состояния морской воды» EOS 80 проведено в работе греческого исследователя Пантократоса (А. Pantokratoras) [61]. Показано, что, если температура вдали от источника тепла больше температуры инверсии, факел схож с факелом в отсутствие инверсии плотности, а в случае, когда она меньше температуры инверсии, факел имеет сложную структуру. Сравнительный экспериментальный анализ конвективных факелов от линейного источника тепла с помощью визуализации шпирен методом проведен Букреевым В. И., Гавриловым Н. В. и Чеботниковым А. В. [64]. Ими найдено, что, если температура вдали от факела меньше температуры инверсии, факел имеет конечную высоту, что косвенно подтверждает результат работы [61].

Отметим, что во время Второй Мировой Войны теоретическое исследование конвективных факелов от линейного источника тепла было мотивировано надеждой с их помощью убирать туман со взлетно-посадочной полосы аэродрома, помогать тушению пожаров [85].

Точечный источник тепла. Рассмотрим ламинарный конвективный факел, возникающий над точечным источником тепла с постоянной мощностью q_p .

Будем полагать, что свободноконвективное течение над источником тепла является осесимметричным и стационарным, а плотность жидкости линейно зависит от температуры по закону (1.1). Применяв к уравнениям тепловой конвекции в приближении Буссинеска (1.4) приближение пограничного слоя Йи (C.-S. Yih) [56] путем автомодельного преобразования свел задачу к системе автомодельных дифференциальных уравнений. Эта работа малодоступна в настоящее время, ее изложение содержится в более поздней работе Йи и Ву (C.-S. Yih, F. Wu) [57]. Независимо от Йи (C.-S. Yih) то же автомодельное преобразование было получено в уже цитировавшейся работе Бранда и Лэя (Brand R.S., Lahey F.J.) [60].

Изложим вкратце, следуя [60], процедуру сведения сложной краевой задачи для системы нелинейных уравнений в частных производных к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения тепловой конвекции (1.4) с учетом приближения пограничного слоя применительно к факелу от точечного источника тепла в цилиндрической системе координат (r, z) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{\nu}{r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\alpha T\theta, \\ v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} + v_r \frac{\partial \theta}{\partial r} &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} (rv_z) + \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь v_z , v_r – вертикальная и радиальная компоненты скорости, ϑ – аналогичное (1.6) безразмерное нормированное отклонение температуры от значения температуры T_∞ при $r \rightarrow \infty$.

В соответствии с приближением пограничного слоя решение уравнений (1.17) хорошо аппроксимирует решение полных уравнений тепловой конвекции (1.4) вдали от источника тепла, когда расстояние до источника велико в сравнении с толщиной пограничного слоя.

На оси симметрии и вдали от нее должны выполняться условия:

$$v_r = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad v_z \text{ конечно при } r = 0 \quad (1.18)$$

$$v_z = \theta = 0. \quad \text{при } r = \infty \quad (1.19)$$

Задание граничных условий на горизонтальной плоскости $z = 0$ и при $z \rightarrow \infty$ не является необходимым, так как применение приближения пограничного слоя понижает порядок системы уравнений, поэтому условия (1.18)–(1.19) позволяют получить решение при любых $z \geq 0$.

Уравнения (1.17) допускают автомодельное преобразование, сводящее систему нелинейных уравнений в частных производных к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(f'' - \frac{f'}{\eta} \right)' + \frac{ff''}{\eta} - \frac{ff'}{\eta^2} + \eta\tau = 0, \quad (1.20)$$

$$\eta\tau' + \text{Pr} f\tau = 0. \quad (1.21)$$

с граничными условиями:

$$f(0) = f''(0) = \tau'(0) = 0, \quad (1.22)$$

$$f'(\infty) = \tau(\infty) = 0. \quad (1.23)$$

Задача (1.20)–(1.23) может быть решена численно стандартными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений или аналитически, например, методом сращиваемых асимптотических разложений. Результаты таких исследований приведены в монографии [3].

Для двух значений числа Прандтля $Pr = 2$ и $Pr = 1$ задача (1.20)–(1.23) может быть решена точно. Автомодельные функции $f(\eta)$ и $\tau(\eta)$ этих решений имеют простой вид:

$$f = \frac{b\eta^2}{b + \eta^2}, \quad \tau = c(b + \eta^2)^{-\frac{bPr}{2}}, \quad (1.24)$$

где b и c константы, зависящие от числа Прандтля.

Эти точные решения были получены впервые Йи (C.–S. Yih) [56] и независимо переоткрыты в работе Бранда и Лэя (R.S.Brand, F.J. Lahey) [60]. Хотя жидкостей и газов со значениями числа Прандтля $Pr = 2$ и $Pr = 1$ не существует, точные решения (1.24) играют важную роль в теории тепловой конвекции и могут быть использованы при тестировании численных методов. Простой вид автомодельных функций использовался, например, при анализе динамики неравномерно нагретых жидких парамагнетиков [27,43].

Исследование ламинарного факела в жидкости с инверсией плотности от точечного источника тепла методами теории пограничного слоя провели Моллендорф и др. (Mollendorf J.C. et al.) [37]. Для аппроксимации зависимости плотности от температуры использована степенная зависимость (1.3). Показано, что в случае, когда температура жидкости вдали от центральной плоскости факела равна температуре инверсии, краевая задача для системы уравнений Буссинеска может быть сведена к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} f''' - \frac{2-\gamma}{4+\gamma}(f')^2 + \frac{3}{4+\gamma}ff'' + \tau = 0, \\ \tau' + \frac{3\gamma}{4+\gamma}Pr f\tau = 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} f = f'' = \tau' = 0 \text{ при } \eta = 0, \\ f' \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Из (1.25) видно, что нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для автомодельной переменной f содержит два нелинейных

члена (квадрат первой производной $(f')^2$ и произведение ff'' , содержащее вторую производную). Такие нелинейные члены характерны для задач, решаемых в приближении пограничного слоя, – задачи Блазиуса об обтекании плоской пластины [25], задачи Польшаузена о конвекции у плоской вертикальной стенки [19], течения около клина [24].

В предельном случае $\gamma = 1$ задача (1.15), (1.16) переходит в рассмотренную выше задачу (1.9) – (1.12). Исследование этой системы проведено в [37] численно для $\gamma = 1.9$.

Численное исследование конвективного факела от точечного источника тепла с учетом упомянутого выше «Международного уравнения состояния морской воды» EOS 80 проведено в работах Пантократора (A. Pantokratoras) [62,63]. Им показано, что, если температура вдали от источника тепла равна температуре инверсии, температура над источником тепла меньше, чем в случае отсутствия инверсии плотности.

Интерес к конвективным факелам, т.е. развитым плюмам в терминологии принятой в геофизике, от точечного источника тепла в условиях больших чисел Прандтля (число Прандтля мантии Земли исключительно велико $\approx 10^{24}$ [27]) резко возрос в конце двадцатого века в связи с попытками понять путем их экспериментального и численного изучения сложные конвективные процессы в мантии Земли [51]. Отметим, что в соответствии с современными представлениями о тепловой конвекции в мантии Земли конвективные факела ответственны за 6% от общего теплового потока из мантии к поверхности Земли [49].

1.3 Конвекция в слое с температурной инверсией плотности

Рассмотрим случай подогрева снизу жидкости с тепловой инверсией плотности не локальным, а равномерно распределенным по бесконечной горизонтальной плоскости источником тепла. Будем полагать, что жидкость, плотность которой зависит от температуры по квадратичному закону (1.2), находится над этой плоскостью и ограничена сверху другой горизонтальной

плоскостью. Если такой подогрев создает в слое жидкости постоянный вертикальный градиент температуры, то выполняются условия механического равновесия [1], т.е. внешний градиент температуры в жидкости параллелен вектору ускорения свободного падения. Поэтому жидкость в слое может покоиться и конвекция возникает в результате потери устойчивости этого равновесного состояния при увеличении интенсивности подогрева.

В предельном случае отсутствия тепловой инверсии, т.е. когда плотность жидкости зависит от температуры линейно в соответствии с формулой (1.1), задача переходит в задачу Релея-Бенара [6], – наиболее исследованную задачу теории конвективной устойчивости несжимаемой жидкости. Содержательный обзор результатов исследования задачи Релея-Бенара и ее обобщений, т.е. определения конвективной устойчивости равновесия и надкритических течений в подогреваемом снизу бесконечном плоском слое для различных вариантов условий для скорости и температуры на границах можно найти в монографиях [1, 6, 12]. Отметим, что в случае подогрева путем задания постоянных разных температур на границах возникающая конвекция имеет ячеистый характер, а, если на границах слоя задан постоянный тепловой поток, то наиболее опасными являются длинноволновые возмущения [1].

Наибольшая опасность длинноволновых возмущений в слое, на границах которого задан постоянный тепловой поток, показана с помощью линейной теории устойчивости в работе Спарроу и др, (Sparrow E. M. et al.) [18]. Чапман и Проктор (C.J. Chapman, M.R.E. Proctor) [65], впервые использовав метод многих масштабов в тепловой конвекции, развили теорию слабо нелинейной периодической надкритической конвекции и установили, что надкритическое движение имеет вид крупномасштабного одновихревого течения, занимающего всю ячейку. Они выдвинули предположение, что «...для вязких краевых условий наиболее устойчивым будет пространственный период порядка ширины полости, хотя он может быть и не

самым большим возможным.». В работе Хьюита и др. (Hewitt J. M. et al.) [66] представлен численный расчет конвекции в прямоугольной ячейке с аспектным отношением 8 для бесконечного значения числа Прандтля и числа Релея, превышающего критическое в сотни раз. Все границы полагались идеальными, на верхней и нижней задавался постоянный вертикальный поток тепла, а боковые полагались теплоизолированными. В начальный момент задавалось возмущение температуры в центре полости. В результате переходного процесса устанавливалось стационарное течение (см. рис. 1.1) с двумя вытянутыми по горизонтали, но различными по масштабу вихрями.

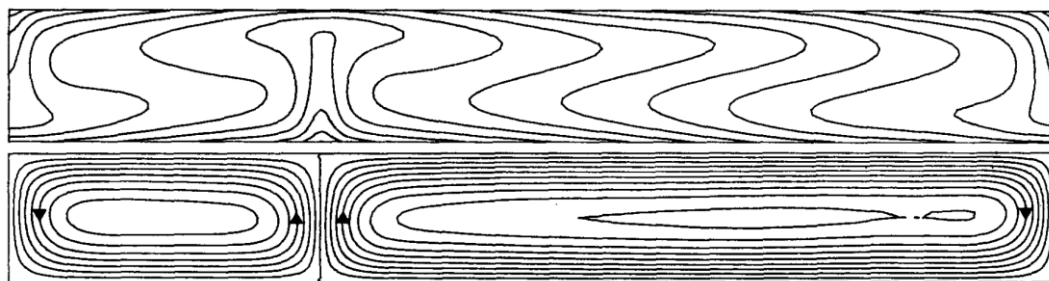


Рис.1.1 Изотермы и линии тока, полученные в работе Хьюита и др.(Hewitt J. M. et al.) [66]. См. пояснения в тексте.

Одновихревое крупномасштабное течение, предсказываемое слабонелинейной теорией [65], в [66] не наблюдалось. Расчет для такой же полости с аналогичными тепловыми условиями и идеальными стенками, но для числа Прандтля 1 представлен в работе Ишиватари с соавторами (Ishiwatari M. et al.) [67]. Картина течения аналогична представленной на рис.1.1, но ячейки имели одинаковый масштаб. Случай вытянутой полости с заданным вертикальным тепловым потоком, с более реалистичными всеми твердыми границами аспектным отношением 4 рассмотрен в работе Нгуена и Прудома (Nguyen T.H., Prud'homme M.) [68]. Течение соответствовало предсказанию работы [65] и имело вид одного крупномасштабного вихря.

Линейная теория конвективной устойчивости равновесия в слое воды с инверсией плотности для случая свободных недеформируемых изотермических границ была построена в работе Верониса (G.Veronis) [32]. Была определена граница устойчивости состояния механического

равновесия. Температура нижней границы полагалась равной 0°C , а верхней задавалась такой, что температура инверсии плотности находилась внутри слоя. В таких условиях пространство между изотермическими границами делилось на два слоя. В нижнем слое жидкость была стратифицирована неустойчиво, поскольку при увеличении температуры от 0°C до 4°C плотность воды аномально увеличивается. В верхнем слое, плотность с увеличением температуры уменьшается и эта часть слоя жидкости стратифицирована устойчиво. Веронис показал, что наиболее опасными являются плоские ячеистые возмущения. Эти возмущения возникают в неустойчиво стратифицированном слое, но проникают и в верхний устойчиво стратифицированный слой. Для обозначения этого нового для теории конвективной устойчивости явления Веронис ввел термин, – проникающая конвекция. В этой работе была отмечена математическая эквивалентность задачи для твердых границ и задачи о потере устойчивости классического течения Куэтта между вращающимися в противоположных направлениях цилиндрами. При этом отношение скоростей вращения внутреннего и внешнего цилиндров играет роль, аналогичную роли отношения толщины устойчиво стратифицированной части слоя к его полной толщине. Получена простая алгебраическая формула, связывающая число Тейлора с числом Релея.

В работе Меркера и др. (Merker G.P. et al.) [70] исследованы случаи фиксированной температуры и фиксированного теплового потока на границах. В теоретической части работы, посвященной анализу случая свободной верхней и твердой нижней границ с заданным тепловым потоком на обеих границах при выводе линеаризованных уравнений для амплитуд возмущений совершена ошибка, – были потеряны два слагаемых.

В работе Робертса (A.J. Roberts) [71] рассмотрены устойчивость и слабо надкритическое течение в бесконечном слое с твердыми границами с заданным на них тепловым потоком. Рассмотрена неустойчивость в длинноволновом приближении, показано, что возможна неустойчивость

относительно возмущений с конечным значением волнового числа, задача для возмущений с конечной длиной волны не решалась. В слабо нелинейном приближении определена структура надкритического течения в вытянутой ячейке с периодическими условиями на вертикальных границах и условиями прилипания на горизонтальных (см. рис.1.2). Видно, что уже при надкритичности в две сотых надкритическое течение несимметрично и приводит к заметному наклону изотермы (отмечена точечной линией), соответствующей максимуму плотности жидкости.

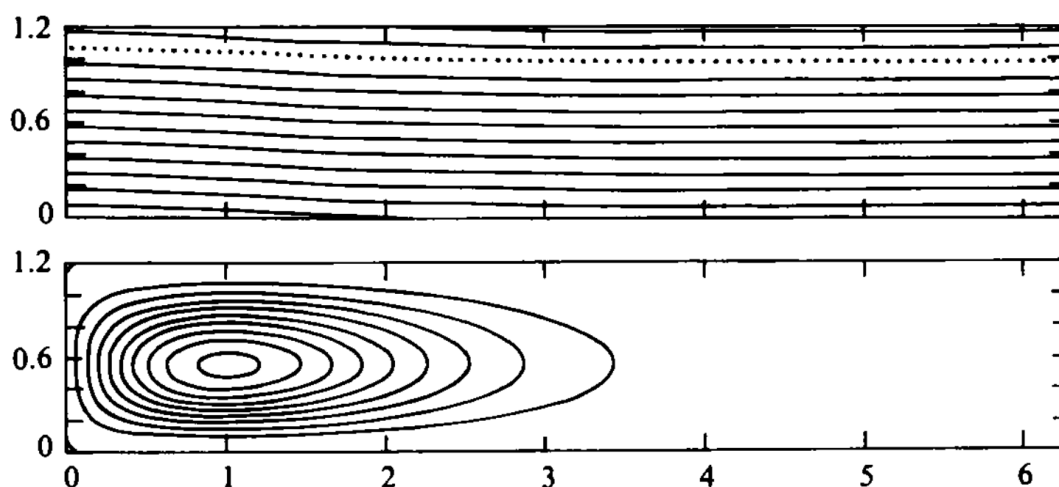


Рис.1.2 Изотермы и линии тока, полученные в работе Робертса (Roberts A. J.) [71]. См. пояснения в тексте.

Хаунг, Лу и Молендорф (Hawng L.-T., Lu W.-F., Mollendorf J.C.) [72] провели теоретическое и экспериментальное исследование влияния инверсии плотности на возникновение конвекции в горизонтальном слое воды с твердыми изотермическими границами. Как аналитические, так и экспериментальные результаты показали, что наличие инверсии плотности приводит к стабилизации равновесия.

Надолин К.А. [80] численно исследовал влияние положения точки инверсии плотности внутри слоя на критическое значение числа Релея и интенсивность надкритических конвективных движений для прямоугольной (в проекции на горизонтальную плоскость) формы ячеек.

Молендорф и Дженн (Mollendorf J.C., Jann K.H.) [73] для определения условий возникновения конвекции в горизонтальном слое воды вблизи точки

экстремума плотности использовали уравнение состояния (1.3), основанное на измерениях изменения плотности как чистой, так и соленой воды. Воде с различной соленостью соответствуют разные значения параметров α_γ и γ . Установлено, что эффекты, связанные с наличием инверсии плотности, играют стабилизирующую роль.

Секи, Фукусаки и Сугавара (Seki N., Fukusako S., Sugawara M.A.) [52] исследовали устойчивость слоя жидкости с инверсией плотности, образовавшегося в результате плавления льда, при нагреве сверху постоянным радиационным потоком (на верхней границе задан равномерный тепловой поток). Нижняя граница слоя жидкости имела температуру плавления льда 0°C . Температурная зависимость плотности от температуры аппроксимировалась кубическим полиномом. В работе теоретически и экспериментально показано, что критическое число Релея зависит от температуры свободной поверхности T_2 , если $T_2 < 8^\circ\text{C}$, и не зависит от T_2 при $T_2 > 8^\circ\text{C}$.

Ву и Ченг (Wu R.S., Cheng K.C.) [86] провели линейный анализ устойчивости равновесия для случая наличия термокапиллярного эффекта и тепловых условий третьего рода на верхней свободной границе, нижняя граница считалась твердой и изотермической. Принятая в этой работе аппроксимация температурной зависимости плотности в виде кубического полинома дала возможность исследовать задачу в более широком температурном интервале, чем в случае квадратичной зависимости. Обзор других работ по изучению конвекции в слое холодной воды, выполненных до 1978 года, можно найти в обзорной работе [4].

Влияние конечной теплопроводности окружающих массивов рассмотрено в упоминавшийся выше работе [72]. Анализ, проведенный для случая двух твердых массивов, показал, что при наличии температурной инверсии плотности конечная теплопроводность массивов, как и в отсутствие инверсии, ведет к дестабилизации. Зависимость критического числа Релея от

безразмерной толщины устойчиво стратифицированного слоя R ($R = 1 - z_i$, где z_i – безразмерная толщина неустойчиво стратифицированного слоя, расположенного под устойчиво стратифицированным) не зависит от граничных условий. Совместный эффект как наличия максимума плотности, так и конечной теплопроводности окружающих массивов, при больших отрицательных R , т.е. $z_i \gg 1$, приводит к дестабилизации относительно буссинесковского предела $Ra_c = 1708$, а при увеличении R (уменьшении z_i) наблюдается стабилизация.

В.Б. Бекежанова [38,39] исследовала конвективную устойчивость слоя воды при задании на свободной поверхности фиксированного теплового потока с учетом межфазного взаимодействия воды и воздуха. Нижняя граница полагалась твердой и изотермической. Была учтена и зависимость плотности от давления, проявляющаяся в случае, когда толщина слоя воды достигает нескольких сотен метров. Анализ линейной устойчивости, проведенный В.Б. Бекежановой показал, что в слоях глубиной до 10 м перепады давления не оказывают существенного влияния на распределение плотности, и критические числа Релея совпадают с полученными в упоминавшейся выше работе К.А. Надолина [80], где зависимость плотности от давления не учитывалась. При увеличении толщины слоя до 500 м и 1000 м критические числа Релея увеличивались в 2.5 и 3 раза соответственно. Это говорит о том, что сжимаемость является существенно стабилизирующим фактором. К аналогичному выводу привело исследование Ермоленко А.Н. [74], в котором учитывалось влияние давления на плотность, но обе границы полагались изотермическими.

В серии работ Кузнецовой Д.В., Сибгатуллина И.Н. [81-83] исследована задача о проникающей конвекции в горизонтальном слое талой воды между изотермическими свободными границами. Точка инверсии находилась внутри слоя, развитые нелинейные режимы находились методом Галеркина с большим количеством базовых функций. В расчетах,

проведенных на суперкомпьютере МГУ, исследовались стохастические и автоколебательные режимы.

1.4 Проникающая конвекция в полостях различной формы

В значительном количестве работ исследуется конвекция жидкости с инверсией плотности для форм полостей, отличных от горизонтального плоского слоя. Так, А.Ф. Пшеничниковым [84] было получено новое точное решение уравнений тепловой конвекции, описывающее плоскопараллельное течение жидкости с инверсией плотности в вертикальном плоском слое с твердыми изотермическими границами. Устойчивость этого сложного многослойного течения методами линейной теории устойчивости исследована Г.З. Гершуни с коллегами [75]. Найдено, что при расположении точки инверсии плотности внутри слоя появляется дополнительная мода колебательной неустойчивости, причем колебательные возмущения играют в этом случае определяющую роль.

Расчеты нелинейных режимов конвекции жидкости вблизи точки инверсии плотности впервые выполнены методом сеток для прямоугольных полостей в серии работ 1970-1974 гг. А.С. Блохина с сотрудниками [76-78]. Были обнаружены и исследованы автоколебательные режимы конвекции. Анализ этих работ содержится в обзоре Г.З. Гершуни и Е. М. Жуховицкого [4]. Ссылки на аналогичные зарубежные работы, которые были выполнены позднее работ А.С. Блохина с соавторами, можно найти в обзорной монографии [3]. В частности, Мур и Вейс (Moore D.R, Weiss N.O.) [69] для случая свободных границ численно исследовали случай заданного постоянного теплового потока на нижней границе прямоугольной двумерной области, критические числа Релея оказались меньше, чем по линейной теории; предложена модель, объясняющая этот результат. В этой же работе содержатся ссылки на ранние эксперименты по устойчивости равновесия слоя воды вблизи точки инверсии, в которых показано, что при наличии

инверсии плотности возможно жесткое возбуждение надкритического течения.

Начиная с работ Вассеура и Робилларда (Vasseur P., Robillard L.) [87,88], большое внимание исследователи уделяли развитым нелинейным режимам конвекции талой воды в замкнутых полостях, в основном, прямоугольной и цилиндрической формы. Содержательный обзор исследований такого рода, выполненных до 1997 года, можно найти в диссертационных работах С.П. Родионова и Д.С. Моргуна [89, 90].

Первое численное исследование трехмерных режимов конвекции при наличии инверсии плотности проведено С.П. Родионовым [89]. Развитые нелинейные режимы конвекции холодной воды в квадратной полости, плоском канале, кубе и полости с движущейся верхней границей исследовалась в серии работ, выполненных под руководством профессора Зубкова П.Т. [90-97] и опубликованных в период с 1999 по 2002 гг. В этих работах путем численного решения нелинейных уравнений в частных производных исследована многовихревая структура развитых режимов, исследованы возникающие при увеличении интенсивности нагрева гистерезисные переходы между стационарными состояниями. Исследованы автоколебательные режимы, возникающие при достаточно больших значениях числа Грасгофа. Границы рассмотренных полостей были либо изотермическими, либо теплоизолированными.

Работы [98-116], выполненные в период с 2001 года по настоящее время посвящены исследованию различных режимов конвекции жидкости с температурной инверсией плотности в замкнутых полостях прямоугольной и цилиндрической формы. Границы полостей полагались либо изотермическими, либо теплоизолированными.

1.5 Выводы

1. Как видно из приведенного обзора, аналитическое исследование конвективных факелов от линейного и точечного источников тепла с

заданной мощностью тепловыделения в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры с целью получения точного решения не проводилось. Поэтому важно провести исследование возможности обобщения точных решений о ламинарных конвективных факелах на случай жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры.

2. В большинстве работ по исследованию конвекции при наличии инверсии плотности в плоском слое и замкнутых полостях горизонтальные границы полагались изотермическими. Принципиальный вопрос о возникновении конвекции в подогреваемой снизу жидкости с инверсией плотности для случая границ с заданным тепловым потоком остался мало изученным. Не исследована задача для случая, когда верхняя граница свободная, а нижняя твердая. Представляет интерес проведение исследования длинноволновой неустойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости с инверсией плотности со свободной верхней и твердой нижней границами. Необходимо провести численное исследование неустойчивости по отношению к возмущениям с конечной длиной волны и определить границы существования этих неустойчивостей.

3. Анализ приведенных в обзоре работ по исследованию режимов конвекции в полостях конечного размера и различной формы показал, что неисследованным остался важный вопрос о структуре надкритических режимов конвекции жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры, например, воды, температура которой близка к комнатной, в открытых сверху прямоугольных полостях с различными аспектными отношениями при постоянном вертикальном тепловом потоке на границах.

4. Не исследован вопрос о влиянии положения точки инверсии на структуру надкритических режимов проникающей конвекции в прямоугольной полости конечного размера с заданным тепловым потоком на горизонтальных границах.

Глава 2. Конвективные факела в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры

Настоящая глава диссертационной работы посвящена получению точных решений задач о конвективных факелах от линейного и точечного источников тепла с заданной мощностью тепловыделения в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры. До работ автора такие решения не были получены.

Основные результаты, приведенные в этой главе, опубликованы в [132,133].

2.1 Плоский конвективный факел

Рассмотрим ламинарный конвективный факел, возникающий над источником тепла, имеющим форму бесконечной горизонтальной прямой линии, с постоянной тепловой мощностью q_l , отнесенной к единице длины. Для описания течения жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры в таком факеле Йи (C.-S. Yih) [55] использовал приближение пограничного слоя и получил путем автомодельного преобразования систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая же система автомодельных обыкновенных дифференциальных уравнений была получена независимо от Йи (C.-S. Yih) в работах Фуджи (Fujii T.) [58] и Бранда и Лэя (Brand R.S., Lahey F.J.) [60]. В этих же работах для значений числа Прандтля $Pr = 2$ и $Pr = 5/9$ получены точные решения этой системы обыкновенных уравнений.

Исследование ламинарного конвективного факела от линейного источника тепла в жидкости с инверсией плотности методами теории пограничного слоя впервые провели Моллендорф и др. (Mollendorf J.C. et al.) [37]. Для аппроксимации зависимости плотности от температуры ими

использовалась степенная зависимость (1.3). Показано, что в случае, когда температура жидкости вдали от центральной плоскости факела равна температуре инверсии, краевая задача для системы уравнений конвекции в приближении Буссинеска может быть сведена к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась в [37] численно для некоторых значений параметров задачи.

Уравнения для факела в приближении пограничного слоя в плоском случае. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет пространство над горизонтальной теплоизолированной плоскостью. Будем считать, что кинематическая вязкость ν , температуропроводность χ , ускорение свободного падения g постоянны, а зависимость плотности ρ от температуры T имеет степенной вид, предложенный в работе Гебхарта и Моллендорфа (B.Gebhart, J.C. Mollendorf) [35]:

$$\rho(T) = \rho_m \left(1 - \alpha_\gamma |T - T_i|^\gamma \right), \quad (2.1)$$

где ρ_m – максимальная плотность, α_γ – коэффициент теплового расширения, T_i – температура инверсии плотности, γ – показатель температурной инверсии плотности.

Рассмотрим случай линейного источника тепла на плоскости, т.е. плоский факел. Система координат выбрана так, что ось x совпадает с осью симметрии факела и направлена вверх, а источник тепла находится в начале координат. Следуя [37], запишем уравнения, описывающие стационарное конвективное движение в приближении пограничного слоя, в виде:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g \alpha_\gamma T_\infty^\gamma \theta^\gamma, \\ \text{Pr} \left(v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этих уравнениях: v_x и v_y - компоненты скорости, а θ - безразмерная температура, связанная с локальной температурой $T(x, y)$ и температурой вдали от факела $T_\infty = T_i$ соотношением:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty}. \quad (2.3)$$

где ν - кинематическая вязкость, g - ускорение силы тяжести, $Pr = \nu/\chi$ - число Прандтля.

Граничные условия на плоскости симметрии и вдали от нее запишем в виде:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0: v_y = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \\ \text{при } y \rightarrow \infty: v_x \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ниже будет показано, что задача (2.2) -(2.4), сформулированная и исследованная численно в [37] для $\gamma = 1.9$, может быть решена точно для любых значений γ . Для каждого γ точное решение можно получить лишь для двух определенных значений числа Прандтля $Pr_1(\gamma)$ и $Pr_2(\gamma)$. Как уже отмечалось во введении, в случае жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры, т.е. при $\gamma = 1$ точные решения задачи были получены в работах [55, 58, 60] для двух значений числа Прандтля $Pr = 2$ и $Pr = 5/9$.

Автомодельное преобразование к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Система уравнений в частных производных (2.2) может быть сведена к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью автомодельного преобразования. Такое преобразование для случая линейной зависимости плотности жидкости от температуры, т.е. для $\gamma = 1$, было проведено в работах [55, 58, 60]. Преобразование для случая произвольного γ было проведено в [32]. Вывод автомодельных уравнений, изложенный в [60] является наиболее

изящным. Он приводит к более простой форме уравнений и, как будет показано ниже, допускает обобщение на случай произвольного γ .

Проведем преобразование уравнений в частных производных (2.2) к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следуя методике работы [60]. Введем для этого безразмерную автомодельную переменную $\eta_l(x, y)$ и безразмерные функции $f_l(\eta)$, $p_l(\eta)$:

$$\eta_l = ax^{\alpha-1}, \quad (2.5)$$

$$\psi_l(x, y) = avx^\alpha f_l(\eta_l) \quad (2.6)$$

$$\theta(x, y) = \left(a^4 v^2 (g\alpha_\gamma T_\infty^\gamma)^{-1} \right)^{1/\gamma} x^{\frac{4\alpha-3}{\gamma}} p_l(\eta_l) \quad (2.7)$$

Здесь $\psi_l(x, y)$ – функция тока, связанная с компонентами скорости соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial \psi_l}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi_l}{\partial x}. \quad (2.8)$$

Преобразуем систему (2.2) с помощью (2.5)–(2.8) к виду:

$$f''' + \alpha f''f - (2\alpha - 1)(f')^2 + p^\gamma = 0, \quad (2.9)$$

$$p'' + \alpha \text{Pr} p'f + \text{Pr} \frac{3-4\alpha}{\gamma} pf' = 0. \quad (2.10)$$

Граничные условия (2.4) в терминах f и p будут иметь вид:

$$f(0) = f''(0) = p'(0) = 0, \quad (2.11)$$

$$f'(\infty) = p(\infty) = 0. \quad (2.12)$$

Для того, чтобы не загромождать формулы здесь и далее в настоящей главе нижний индекс l у автомодельной переменной $\eta_l(x, y)$ и функций $f_l(\eta_l)$, $p_l(\eta_l)$ и $\psi_l(x, y)$ опущен.

Константа α может быть определена путем простого преобразования уравнения (2.10) и интегрирования получившегося

уравнения по η от нуля до бесконечности. Действительно, используя формулу дифференцирования произведения функций $(fp)' = f'p + fp'$ уравнения (2.10) можно записать в виде

$$\frac{1}{Pr} \frac{dp'}{d\eta} + \alpha \frac{d}{d\eta}(fp) + \left(\frac{3-4\alpha-\alpha\gamma}{\gamma} \right) fp = 0. \quad (2.13)$$

Интегрирование (2.13) на интервале $(0, \infty)$ дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} [p'(\infty) - p'(0)] + \alpha [p(\infty)f(\infty) - p(0)f(0)] \\ + (3-4\alpha-\alpha\gamma) \int_0^{\infty} pf'd\eta = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из граничных условий (2.11) и (2.12) следует, что оба выражения, заключенные в квадратные скобки равны нулю, поэтому (2.14) переписывается в виде:

$$(3-4\alpha-\alpha\gamma) \int_0^{\infty} pf'd\eta = 0. \quad (2.15)$$

Будем искать такое решение, при котором вертикальная компонента скорости во всей области неотрицательна, т.е. $v_x \geq 0$. Тогда из (2.5), (2.6) и (2.8) следует, что $f' \geq 0$ при $0 \leq \eta \leq \infty$. Из неотрицательности вертикальной компоненты скорости вытекает, что конвективный тепловой поток в каждой точке полости направлен вверх. Из этого и того, что источник тепла расположен в самом низу, следует, что всюду $T \geq T_i$. Отсюда, учитывая (2.3) и (2.7) получаем, что и $p \geq 0$ при всех $0 \leq \eta \leq \infty$. Таким образом можно полагать, что p и f' всегда неотрицательны, а над источником тепла имеется область где они положительны, т.е. интеграл в формуле (2.15) положителен. Поэтому единственный способ удовлетворить уравнение (2.15), – положить равным нулю коэффициент перед интегральным выражением.

Приравняв этот коэффициент к нулю получаем выражение для определения α через показатель инверсии γ :

$$\alpha = \frac{3}{4 + \gamma}. \quad (2.16)$$

Подставив это значение α в (2.10), получаем:

$$p'' + \text{Pr} \frac{3}{4 + \gamma} (pf)' = 0. \quad (2.17)$$

Это уравнение можно проинтегрировать один раз, и результат записать в виде:

$$p' + \text{Pr} \frac{3}{4 + \gamma} pf = \text{const} \quad (2.18)$$

Из граничных условий для p' и f следует, что константа равна нулю. С учетом этого, после подстановки (2.16) в (2.9), система уравнений (2.9)-(2.10) переписется в виде:

$$f''' + \frac{3}{4 + \gamma} f''f - \frac{2 - \gamma}{4 + \gamma} (f')^2 + p^\gamma = 0 \quad (2.19)$$

$$p' + \text{Pr} \frac{3}{4 + \gamma} pf = 0. \quad (2.20)$$

Подставив значение α , определяемое соотношением (2.16) в (2.5) - (2.7), можно получить выражения, связывающие безразмерные величины η , $f(\eta)$ и $p(\eta)$ с физическими координатами, функцией тока и температурой в заданной точке. Автомодельная переменная η , функция тока ψ , компоненты скорости v_x и v_y , безразмерная температура θ связаны с f и τ следующими выражениями:

$$\eta = a\tau x^{-\frac{1+\gamma}{4+\gamma}}, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
\psi &= avx^{\frac{3}{4+\gamma}} f, \\
v_x &= a^2 vx^{\frac{2-\gamma}{4+\gamma}} f', \\
v_y &= -\frac{av}{4+\gamma} x^{\frac{1+\gamma}{4+\gamma}} (3f - (1+\gamma)\eta f'), \\
\theta &= \left(a^4 v^2 (g\alpha_\gamma T_\infty^\gamma)^{-1} \right)^{1/\gamma} p(\eta) x^{-\frac{3}{4+\gamma}}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь a – коэффициент, значение которого после решения задачи следует связать с каким-нибудь внешним условием задачи, как например мощность источника тепла или интегральными характеристиками полей скорости и температуры для заданного значения x_0 .

Описанное преобразование является обобщением преобразования, использованного в [60] для случая обычной жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры, т.е. при $\gamma = 1$. Оно приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих лишь два параметра, – число Прандтля Pr и показатель инверсии γ . Эти параметры характеризуют свойства жидкости, однако решение должно зависеть и от мощности теплового источника. Этот фактор в уравнениях (2.19) – (2.20) учтен неявно, путем введения константы a в определение автомодельной переменной η соотношением (2.5).

Сравнение полученной модели с моделью Молендорфа-Джонсона-Гибхарта. В работе [37] для численного моделирования конвекции от линейного источника над адиабатической поверхностью было проведено преобразование задачи к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f''' + \frac{12}{4+\gamma} f''f + \frac{4(\gamma-2)}{4+\gamma} f'^2 + \frac{\phi^\gamma}{I_\omega} = 0, \tag{2.23}$$

$$\phi'' + Pr \frac{12}{4+\gamma} (f\phi)' = 0. \tag{2.24}$$

Здесь I_ω дополнительная константа, характеризующая интегрально интенсивность локального источника тепла.

Видно, что эта модель схожа с – полученной в предыдущем параграфе. Путем простых преобразований можно показать их тождественность. Введем новую переменную $\tilde{f} = 4f$, умножим уравнение (2.23) на 4 и проинтегрируем уравнение (2.24). Тогда система (2.23) -(2.24) переписется в виде:

$$f''' + \frac{3}{4+\gamma} f''f + \frac{\gamma-2}{4+\gamma} f'^2 + 4 \frac{\phi^\gamma}{I_\omega} = 0, \quad (2.25)$$

$$\phi' + \text{Pr} \frac{3}{4+\gamma} f\phi = 0. \quad (2.26)$$

Знак тильда опущен.

Введем еще одну переменную $\phi = \left(\frac{I_\omega}{4} / \right)^{\frac{1}{\gamma}} \tilde{\phi}$. Подставив ее в (2.25) -(2.26)

получаем:

$$f''' + \frac{3}{4+\gamma} f''f + \frac{\gamma-2}{4+\gamma} f'^2 + \phi^\gamma = 0, \quad (2.27)$$

$$\phi' + \text{Pr} \frac{3}{4+\gamma} f\phi = 0. \quad (2.28)$$

Знак тильда опущен.

Как видно отсюда, преобразованная система работы [37] тождественна, полученной выше с использованием методики работы [60]. Недостатком модели, полученной в [37], является наличие дополнительной константы, затрудняющей ее анализ.

Точное решение для плоского конвективного факела. Для получения точного решения задачи удобно вести в рассмотрение новую функцию τ , связанную с p , соотношением:

$$\tau = p^\gamma. \quad (2.29)$$

Тогда уравнения переписутся в виде, совпадающем с точностью до алгебраических коэффициентов с (1.9)-(1.10):

$$f''' + \frac{3}{4+\gamma} f f'' - \frac{2-\gamma}{4+\gamma} (f')^2 + \tau = 0, \quad (2.30)$$

$$\tau' + \frac{3\text{Pr}\gamma}{4+\gamma} f \tau = 0. \quad (2.31)$$

Граничные условия для f и τ запишутся в виде:

$$\begin{aligned} f = f'' = \tau' = 0 \text{ при } \eta = 0, \\ f' \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Будем искать точные решения задачи (2.30) -(2.32) с помощью подстановки:

$$\tau = \frac{5-\gamma}{4+\gamma} (f')^2 + b \left((f')^2 + f f'' \right). \quad (2.33)$$

Эта подстановка является обобщением подстановки, предложенной в [60] для случая линейной зависимости плотности от температуры, т.е. для $\gamma = 1$.

Подставив (2.33) в (2.30) получаем:

$$f''' + \left(\frac{3}{4+\gamma} + b \right) f f'' + \left(\frac{3}{4+\gamma} + b \right) (f')^2 = 0 \quad (2.34)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду:

$$\left(f'' + \left(\frac{3}{4+\gamma} + b \right) f f' \right)' = 0. \quad (2.35)$$

Отсюда следует, что

$$f'' + \left(\frac{3}{4+\gamma} + b \right) f f' = \text{const}. \quad (2.36)$$

Из граничных условий (2.32) следует, что константу можно положить равной нулю. Тогда (2.30) может быть записано в виде:

$$f'' + \frac{3+b(4+\gamma)}{4+\gamma} ff' = 0, \quad (2.37)$$

Подстановка (2.33) в (2.31) дает:

$$bf \left[f'' + \frac{3\text{Pr}\gamma}{4+\gamma} ff' \right]' + \quad (2.38)$$

$$3 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5-\gamma}{4+\gamma} + b \right) \left[f'' + \frac{3\text{Pr}\gamma}{4+\gamma} \cdot \frac{5-\gamma}{2(5-\gamma)+3b(4+\gamma)} ff' \right] f' = 0$$

Уравнения (2.37) и (2.38) должны быть эквивалентны. Эквивалентность этих уравнений можно достичь подобрав зависимости $b(\gamma)$ и $\text{Pr}(\gamma)$. Наиболее просто эту эквивалентность можно достичь, положив нулю коэффициент перед левой квадратной скобкой в уравнении (2.38), т.е. положив

$$b = 0. \quad (2.39)$$

Тогда уравнения (2.37) и (2.38) переписутся в виде:

$$f'' + \frac{3}{4+\gamma} ff' = 0, \quad (2.40)$$

$$f'' + \frac{3}{4+\gamma} \cdot \frac{\gamma\text{Pr}}{2} ff' = 0 \quad (2.41)$$

Эквивалентность этих уравнений можно обеспечить, приравняв коэффициенты при ff' . Это приводит к алгебраическому уравнению, связывающему γ и Pr :

$$\frac{3}{4+\gamma} = \frac{3}{4+\gamma} \cdot \frac{\gamma\text{Pr}}{2} \quad (2.42)$$

Таким образом, уравнения (2.37) и (2.38) одинаковы при выполнении условия:

$$(I): \quad b = 0, \quad \text{Pr} = \frac{2}{\gamma}; \quad (2.43)$$

В этом (I) случае автомодельную функцию $f(\eta)$ можно определить решив уравнение (2.40) с граничными условиями (2.32). Решение этого уравнения имеет вид

$$f(\eta) = \tanh\left(\frac{3}{2(4+\gamma)}\eta\right). \quad (2.44)$$

Подставив это выражение в (2.33) с учетом $b = 0$, см. (2.43), получаем выражение для $\tau(\eta)$:

$$\tau(\eta) = \frac{9(5-\gamma)}{4(4+\gamma)^3} \text{sech}^4\left(\frac{3}{2(4+\gamma)}\eta\right). \quad (2.45)$$

Еще один способ (случай II) добиться эквивалентности уравнений (2.37) и (2.38) заключается в том, чтобы сначала подбором параметра подстановки b обеспечить эквивалентность выражений в квадратных скобках уравнения (2.38). Этого можно достичь положив:

$$\frac{3\text{Pr}\gamma}{4+\gamma} = \frac{3\text{Pr}\gamma}{4+\gamma} \cdot \frac{5-\gamma}{2(5-\gamma)+3b(4+\gamma)}. \quad (2.46)$$

Решая это уравнение относительно b , получаем выражение для параметра подстановки:

$$b = \frac{\gamma-5}{3(4+\gamma)}. \quad (2.47)$$

Таким образом, при выполнении (2.47), выражения в квадратных скобках в уравнении (2.38) эквивалентны между собой. С учетом (2.47) уравнения (2.37) и (2.38) можно переписать в виде:

$$f'' + \frac{1}{3}ff' = 0, \quad (2.48)$$

$$f'' + \frac{3\text{Pr}\gamma}{4+\gamma} ff' = 0 \quad (2.49)$$

Для эквивалентности этих уравнений следует приравнять коэффициенты при ff' , что приводит к выражению:

$$\frac{1}{3} = \frac{3\text{Pr}\gamma}{4+\gamma} \quad (2.50)$$

Подставив в него (2.47), получаем выражение для числа Прандтля:

$$(II): \quad b = \frac{\gamma-5}{3(4+\gamma)}, \quad \text{Pr} = \frac{4+\gamma}{9\gamma}. \quad (2.51)$$

Отметим, что в случае (II) уравнение для f не зависит от γ . Поэтому оно совпадает с полученным и решенным в [60] при анализе случая линейной зависимости плотности жидкости от температуры. Функция f имеет вид:

$$f = \tanh\left(\frac{1}{6}\eta\right). \quad (2.52)$$

Подставив это выражение в (2.33) с учетом (2.51) получим выражение для τ :

$$\tau = \frac{5-\gamma}{54(4+\gamma)} \text{sech}^2\left(\frac{1}{6}\eta\right). \quad (2.53)$$

Таким образом, найдено точное решение задачи о плоском конвективном факеле в жидкости с температурной инверсией плотности для любых действительных значений показателя инверсии γ и избранных значений числа Прандтля $\text{Pr}_1 = \frac{2}{\gamma}$, $\text{Pr}_2 = \frac{4+\gamma}{9\gamma}$.

$$\text{Pr}_1 = \frac{2}{\gamma}, \quad \text{Pr}_2 = \frac{4+\gamma}{9\gamma}.$$

При $\gamma=1$ $\text{Pr}_1 = 2$, а $\text{Pr}_2 = \frac{5}{9}$ и найденные решения (2.44)-(2.45) и (2.52)-(2.53) совпадают с решениями, приведенными в [60].

Из (2.51) и (2.53) видно, что при $\gamma=5$ точное решение приводит к нулевому распределению температуры, т.е. изотермичности конвективного

факела. В теории известен пример изотермического конвективного факела [79]. Для реализации такого факела кроме плавучести необходим дополнительный механизм возбуждения движения, например, вдув, как в упомянутой работе. В нашем случае изотермичность конвективного факела, по-видимому, говорит о неприменимости приближения пограничного слоя для больших значений γ . Поэтому далее мы ограничимся рассмотрением значений показателя инверсии: $\gamma < 5$.

Численное исследование влияния числа Прандтля при фиксированных значениях показателя инверсии. Найденные выше в 2.1.4 точные решения для случая $\gamma > 1$ являются новыми и ранее не получались. Численное исследование краевой задачи, аналогичной (2.30)–(2.32) проводилось в ряде работ, ссылки на которые можно найти в монографии Гебхарта Б. (Gebhart B.) с коллегами [3]. Однако эти расчеты проводились для сочетаний показателя инверсии и числа Прандтля, отличных от параметров точных решений, полученных выше, поэтому для проверки полученных точных решений и изучения влияния числа Прандтля Pr при фиксированных значениях показателя инверсии $\gamma = 2$ и $\gamma = 3$ в данном параграфе задача (2.30)–(2.32) решается численно с использованием метода прямого пошагового интегрирования Рунге-Кутты-Фельдберга 4-5 порядка точности с автоматическим выбором шага [21-23].

Для этого запишем (2.30)–(2.32) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dz} &= y_2, \\
\frac{dy_2}{dz} &= -\frac{3\text{Pr}\gamma}{4+\gamma}(y_1y_4 + y_2y_3), \\
\frac{dy_3}{dz} &= y_4, \\
\frac{dy_4}{dz} &= y_5, \\
\frac{dy_5}{dz} &= -\frac{3}{4+\gamma}y_3y_5 + \frac{2-\gamma}{4+\gamma}y_4^2 - y_1,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Здесь введены обозначения $y_1 = \tau$, $y_2 = \tau'$, $y_3 = f$, $y_4 = f'$, $y_5 = f''$.

Граничные условия (2.32) для новых переменных запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
y_3 = y_5 = y_2 = 0 & \quad \text{при} \quad z = 0, \\
y_4 = 0, \quad y_1 = 0 & \quad \text{при} \quad z = B.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Здесь B достаточно большое число, при котором в численном расчете можно поставить граничные условия, характерные для $z = \infty$. Тестовые расчеты с различными B показали, что значение $B = 23$ является достаточно большим. Его увеличение не приводит к заметным изменениям численного решения. На рис.2.1. представлены полученные в расчетах зависимости $f(\eta)$ для четырех значений числа Прандтля $\text{Pr} = 0.1, 1/3, 1$ и 10 . Напомним, что точные решения могут быть получены для фиксированного значения показателя инверсии γ лишь для двух избранных значений числа Прандтля $\text{Pr} = \frac{2}{\gamma}$ и $\text{Pr} = \frac{4+\gamma}{9\gamma}$. Видно, что точные решения с хорошей точностью подтверждаются численным решением. При увеличении числа Прандтля толщина пограничного слоя, для выбранного значения показателя инверсии $\gamma = 2$, монотонно уменьшается с ростом числа Прандтля. Этот эффект отражается в поведении точных решений.

Результаты численного решения подтверждают этот вывод для всего интервала чисел Прандтля. Это видно из рис. 2.1 где представлены

зависимости $f(\eta)$ для показателя инверсии $\gamma = 2$ и различных значений числа Прандтля. Штриховая линия построена путем табулирования точного решения (2.44). Соответствующее ему значения числа Прандтля определяется формулой (2.43), т.е. $Pr = 2/\gamma = 1$. Сплошная линия построена путем табулирования точного решения (2.52). Ей соответствует избранное значение числа Прандтля (2.51) $Pr = \frac{4 + \gamma}{9\gamma} = \frac{1}{3}$. Результаты численного решения при $Pr = 0.1$ представлены ромбиками, при $Pr = \frac{1}{3}$ – звездочками, при $Pr = 1$ – крестиками, а при $Pr = 10$ – кружочками. Видно, что численные результаты для $Pr = \frac{1}{3}$ и $Pr = 1$ хорошо согласуются с точными решениями.

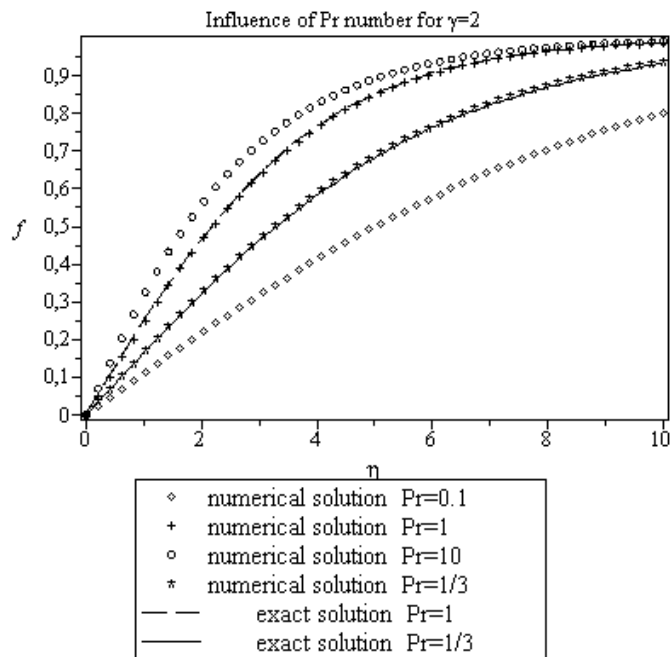


Рис.2.1. Зависимость функции f от автомодельной переменной η при показателе инверсии $\gamma = 2$ для различных чисел Прандтля. Сравнение результатов численного решения и точного аналитического решения.

На рис. 2.2.–2.3 показано влияние числа Прандтля на температурное поле над источником тепла, представленное зависимостью функции τ от автомодельной переменной η . Результаты расчетов для чисел Прандтля

$Pr = 0.1$ и $\frac{1}{3}$ приведены на Рис.2.2., а для $Pr = 10$ – на рис.2.3. Расчеты, проведенные для $Pr = 1$, для удобства сравнения, представлены на обоих рисунках. Приведенные зависимости $\tau(\eta)$, как и рассмотренные выше кривые, $f(\eta)$ показывают, что при увеличении числа Прандтля толщина пограничного слоя, для выбранного значения показателя инверсии $\gamma = 2$, монотонно уменьшается с ростом числа Прандтля. Представленные кривые

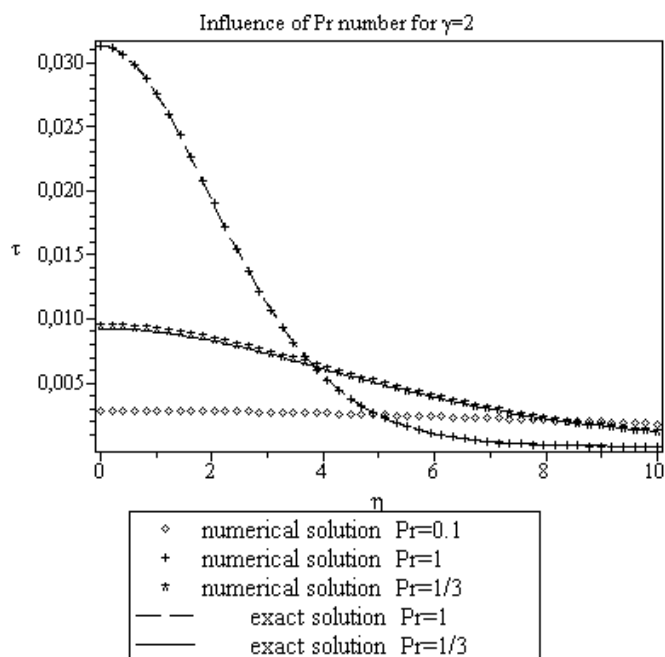


Рис.2.2. Зависимость функции τ от автомодельной переменной η при показателе инверсии $\gamma = 2$ для чисел Прандтля $Pr = 0.1, 1/3$ и 1 . Сравнение результатов численного решения и точного аналитического решения.

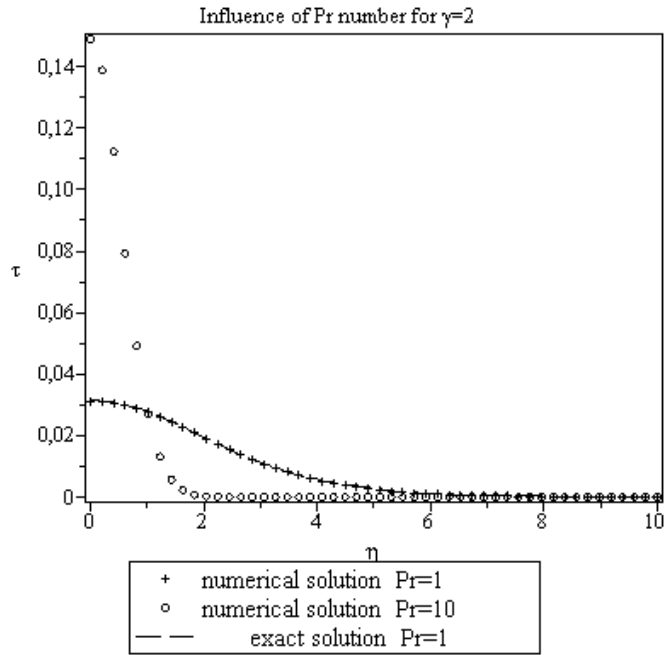


Рис.2.3. Зависимость функции τ от автомодельной переменной η при показателе инверсии $\gamma = 2$ для чисел Прандтля $Pr = 1$ и 10 . Сравнение результатов численного решения и точного аналитического решения.

$\tau(\eta)$, как и рассмотренные выше зависимости $f(\eta)$, показывают хорошее соответствие между результатами численного и точного решения.

На рис. 2.4 представлены зависимости $f(\eta)$ для показателя инверсии $\gamma = 3$ и различных значений числа Прандтля. Штриховая линия построена путем табулирования точного решения (2.44). Соответствующее ему значения числа Прандтля определяется формулой (2.43), т.е. $Pr = \frac{2}{\gamma} = \frac{2}{3}$.

Сплошная линия построена путем табулирования точного решения (2.52). Ей соответствует избранное значение числа Прандтля (2.51), $Pr = \frac{4 + \gamma}{9\gamma} = \frac{7}{27}$.

Результаты численного решения при $Pr = 0.1$ представлены ромбиками, при $Pr = \frac{7}{27}$ – звездочками, при $Pr = \frac{2}{3}$ – крестиками, а при $Pr = 10$ –

кружочками. Видно, что численные результаты для $Pr = \frac{7}{27}$ и $Pr = \frac{2}{3}$ хорошо согласуются с точными решениями.

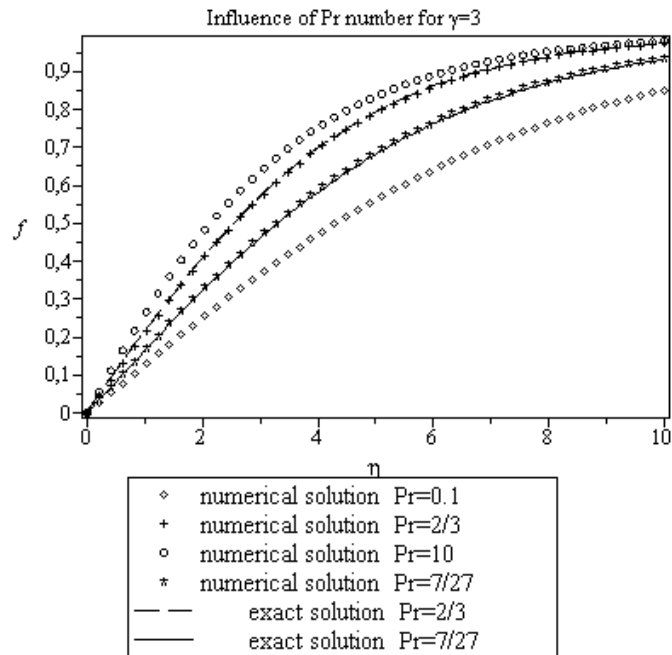


Рис.2.4. Зависимость функции f от автомодельной переменной η при показателе инверсии $\gamma=3$ для различных значений числа Прандтля. Сравнение результатов численного и точного аналитического решений.

На Рис. 2.5. и 2.6 показано влияние числа Прандтля на температурное поле над источником тепла, представленное зависимостью функции τ от автомодельной переменной η . Результаты расчетов для чисел Прандтля $Pr = 0.1$, $\frac{7}{27}$ и $\frac{2}{3}$ приведены на Рис.2.8., а для $Pr = 10$ и $\frac{2}{3}$ – на рис.2.9.

Расчеты проведенные для $Pr = \frac{2}{3}$, для удобства сравнения, представлены на обоих рисунках. Приведенные зависимости $\tau(\eta)$, как и рассмотренные выше кривые $f(\eta)$ показывают, что при увеличении числа Прандтля толщина пограничного слоя, для выбранного значения показателя инверсии $\gamma=3$, монотонно уменьшается с ростом числа Прандтля. Представленные кривые $\tau(\eta)$, как и рассмотренные выше зависимости $f(\eta)$, показывают хорошее соответствие между результатами численного и точного решения.

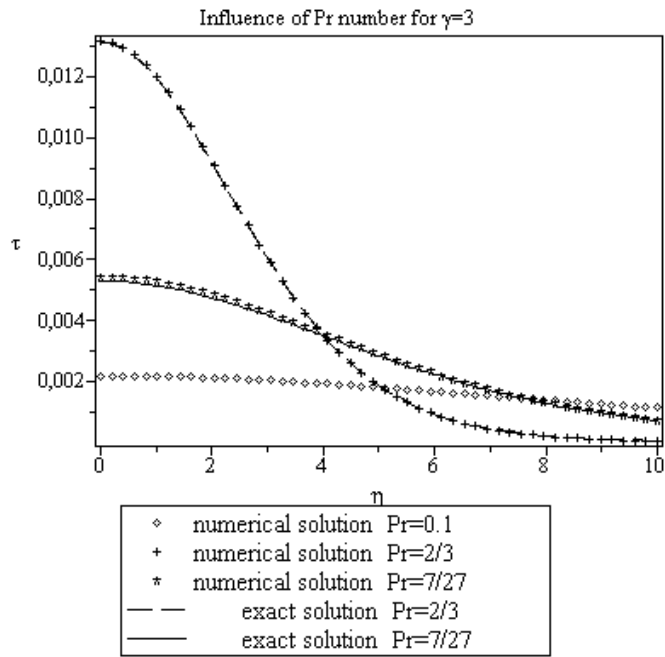


Рис.2.5. Зависимость функции τ от автомодельной переменной η при показателе инверсии $\gamma=3$ для чисел Прандтля $Pr=0.1$, $2/3$ и $7/27$. Сравнение результатов численного решения и точного аналитического решения.

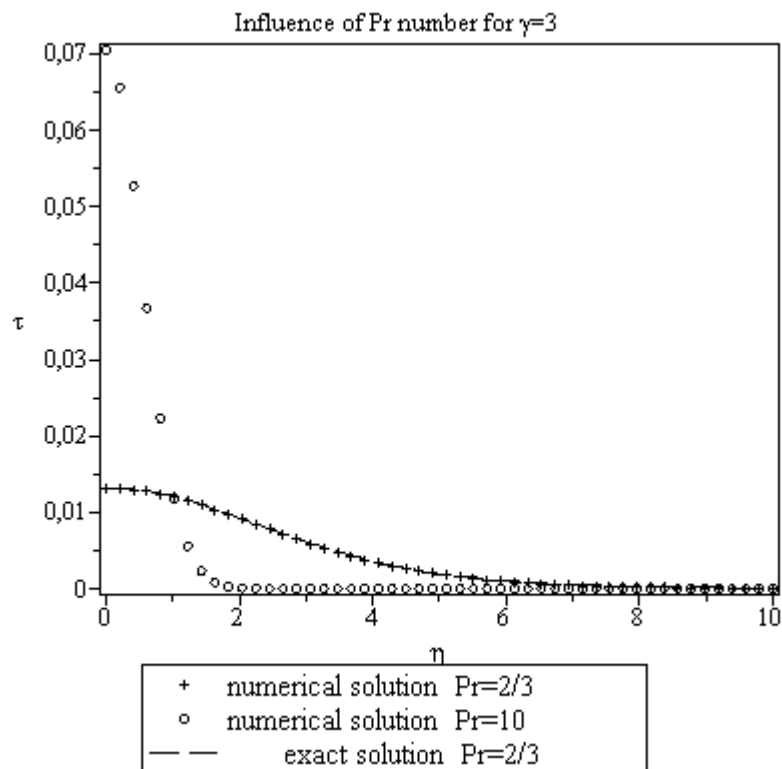


Рис.2.6. Зависимость функции τ от автомодельной переменной η при показателе инверсии $\gamma = 3$ для чисел Прандтля $Pr = 2/3$ и 10 . Сравнение результатов численного решения и точного аналитического решения.

2.2 Осесимметричный конвективный факел

Рассмотрим ламинарный конвективный факел, возникающий над точечным источником тепла с постоянной тепловой мощностью q_p . Для описания течения в таком факеле жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры Йи (C.-S. Yih) [56] использовал приближение пограничного слоя и получил путем автомодельного преобразования систему обыкновенных дифференциальных уравнений и ее точные решения для двух значений числа Прандтля $Pr = 2$ и $Pr = 1$. Такая же система автомодельных обыкновенных дифференциальных уравнений и аналогичное точное решение было получено независимо от Йи (C.-S. Yih) в работе Бранда и Лэя (Brand R.S., Lahey F.J.) [60].

Исследование ламинарного конвективного факела от точечного источника тепла в жидкости с инверсией плотности методами теории пограничного слоя впервые провели Моллендорф и др. (Mollendorf J.C. et al.) [37]. Для аппроксимации зависимости плотности от температуры ими использовалась степенная формула (2.1). Показано, что в случае, когда температура жидкости вдали от центральной плоскости факела равна температуре инверсии, краевая задача для системы уравнений конвекции в приближении Буссинеска может быть сведена к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Настоящая глава диссертационной работы посвящена поиску точных решений задачи о конвективном факеле от точечного источника тепла с заданной мощностью тепловыделения в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры. До работ автора такие решения не были получены.

Уравнения для конвективного факела в приближении пограничного слоя в осесимметричном случае. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет полупространство над горизонтальной плоскостью. Начало цилиндрической системы координат (r, θ, z) расположено на плоскости, ось z направлена вертикально вверх. Плоскость $z = 0$ теплоизолированная. В начале координат расположен точечный источник тепла заданной мощности q_p . Будем полагать, что плотность жидкости зависит от температуры по степенному закону (2.1). Вдали от источника тепла, т.е. при $r \rightarrow \infty$, температура жидкости равна температуре инверсии T_i и плотность ее максимальна.

Коэффициенты кинематической вязкости ν и температуропроводности χ полагаются постоянными, их соотношение определяет число Прандтля $Pr = \nu / \chi$.

Над точечным источником тепла в поле тяжести с ускорением свободного падения g возникает осесимметричный конвективный факел. Стационарные уравнения тепловой конвекции в приближении пограничного слоя в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид [37]:

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g \alpha_\gamma T_i^\gamma \theta^\gamma, \quad (2.56)$$

$$v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} + v_r \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\nu}{Pr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (r v_z) + \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0, \quad (2.58)$$

Граничные условия на оси симметрии и вдали от нее:

$$\begin{aligned} \text{при } r = 0: v_r = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, v_z \text{ конечно,} \\ \text{при } r \rightarrow \infty: v_z \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

В этих уравнениях: v_r и v_z - радиальная и вертикальная компоненты скорости, соответственно, а θ - безразмерная температура, связанная с локальной температурой $T(r, z)$ и температурой вдали от факела $T_\infty = T_i$ соотношением:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty}. \quad (2.60)$$

Ниже будет показано, что задача (2.56) -(2.59), сформулированная и исследованная численно в [37] для показателя инверсии $\gamma = 1.9$, может быть решена точно для любых значений γ . Для каждого γ точное решение можно получить для двух определенных значений числа Прандтля $Pr_1(\gamma)$ и $Pr_2(\gamma)$. Как уже отмечалось во введении, в случае жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры, т.е. при $\gamma = 1$, точные решения для двух значений числа Прандтля $Pr = 2$ и $Pr = 1$ были получены в работах [56, 58].

Автомодельное преобразование задачи к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Система уравнений в частных производных (2.56) -(2.59) может быть сведена к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью автомодельного преобразования. Введем для этого безразмерную автомодельную переменную $\eta_p(r, z)$ и безразмерные функции $f_p(\eta_p)$, $p_p(\eta_p)$:

$$\eta = arz^\alpha, \quad (2.61)$$

$$\psi(z, r) = vzf(\eta), \quad (2.62)$$

$$\theta(z, r) = \left(\frac{a^4 v^2}{g \alpha_\gamma T_\infty^\gamma} \right)^{1/\gamma} z^{\frac{1+4\alpha}{\gamma}} p(\eta). \quad (2.63)$$

Здесь и далее индекс p у переменной η_p , функций $f_p(\eta_p)$ и $p_p(\eta_p)$ опущен.

Здесь $\psi(r, z)$ – функция тока, связанная с компонентами скорости соотношениями:

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.64)$$

Соотношения (2.61) и (2.62) совпадают с преобразованием, предложенным в [60]. Третье соотношение (2.63) предложено автором диссертации и является результатом модификации аналогичного соотношения работы [60]. Модификация заключается во введении показателя инверсии, таким образом, чтобы полученное соотношение при $\gamma = 1$ переходило в формулу, предложенную в [60].

В (2.61), (2.63) входит константа a , значение которой после решения задачи следует связать с каким-нибудь внешним условием задачи, как, например, мощность источника тепла или интегральными характеристиками полей скорости и температуры для заданного значения x_0 .

Подставив (2.61)-(2.64) в (2.56)-(2.58) получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(f'' - \frac{f'}{\eta} \right) + \frac{ff''}{\eta} - \frac{ff'}{\eta^2} - (1 + 2\alpha) \frac{(f')^2}{\eta} + \eta p^\gamma = 0, \quad (2.65)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} (\eta p'' + p) + fp' - \frac{1 + 4\alpha}{\gamma} fp = 0. \quad (2.66)$$

Граничные условия (2.59) в терминах f и p переписутся в виде [58]:

$$f(0) = f'(0) = p'(0) = 0, \quad (2.67)$$

$$p(0) \text{ конечно}, \quad (2.68)$$

$$p(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} [f'(\eta)/\eta] = 0. \quad (2.69)$$

Значение α можно определить из уравнения (2.66) с помощью метода, предложенного в [60]. В соответствии с их рекомендацией перепишем уравнение (2.66) в следующем виде:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\eta p'}{\text{Pr}} + fp \right) - \frac{1+4\alpha+\gamma}{\gamma} fp = 0. \quad (2.70)$$

Проинтегрируем это уравнение по η от нуля до бесконечности и получим выражение:

$$\left(\frac{\eta p'}{\text{Pr}} + fp \right) \Big|_0^\infty = \frac{1+4\alpha+\gamma}{\gamma} \int_0^\infty fp d\eta, \quad (2.71)$$

Из граничных условий (2.67)-(2.69) следует, что левая часть этого выражения равна нулю. Тогда (2.71) переписывается в виде:

$$\frac{1+4\alpha+\gamma}{\gamma} \int_0^\infty fp d\eta = 0. \quad (2.72)$$

Интеграл в этом уравнении можно считать положительно определенным. Действительно, естественно положить, что всюду над горизонтальной плоскостью $z=0$ с точечным источником тепла движущаяся стационарно жидкость имеет неотрицательную вертикальную компоненту v_z и всюду над плоскостью ее температура θ не ниже температуры жидкости на бесконечности, т.е. выполняются соотношения:

$$v_z \geq 0, \quad \theta \geq 0. \quad (2.73)$$

Иными словами, можно полагать, что мы ищем такое точное решение, для которого справедливы соотношения (2.73). Из (2.73) и определений (2.61)-(2.64) следует, что всюду при $\eta \geq 0$:

$$f' \geq 0, \quad \theta \geq 0. \quad (2.74)$$

Естественно предположить, что в окрестности источника тепла $v_z > 0$ и $\theta > 0$. Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty fp d\eta > 0. \quad (2.75)$$

Поэтому для того, чтобы (2.72) выполнялось, должен быть равен нулю коэффициент при этом интеграле, т.е. выполняется соотношение:

$$\frac{1+4\alpha+\gamma}{\gamma} = 0. \quad (2.76)$$

Отсюда получаем значение α :

$$\alpha = -\frac{1+\gamma}{4} \quad (2.77)$$

Для жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры(1.1), т.е. при $\gamma = 1$, получаем $\alpha = 1/2$ [60].

Подставив выражение (2.77) в (2.70), получаем, что уравнение (2.70) имеет первый интеграл

$$\frac{\eta p'}{\text{Pr}} + fp = \text{const}. \quad (2.78)$$

Из граничных условий (2.67) следует, что $\text{const} = 0$.

С учетом этого и (2.76) определяющие уравнения (2.65), (2.66) переписуются в виде:

$$\left(f'' - \frac{f'}{\eta} \right)' + \frac{ff''}{\eta} - \frac{ff'}{\eta^2} - \frac{(1-\gamma)(f')^2}{2\eta} + \eta p^\gamma = 0, \quad (2.79)$$

$$\eta p' + \text{Pr} fp = 0. \quad (2.80)$$

Разделив уравнение (2.79) на η и произведя перегруппировку, его можно записать в виде:

$$\frac{f'''}{\eta} + \left(\frac{f-1}{\eta} \right) \left(\frac{f'}{\eta} \right)' + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(\frac{f'}{\eta} \right)^2 + p^\gamma = 0 \quad (2.81)$$

Сравнение полученной модели с моделью Молендорфа-Джонсона-Геххарта. Уравнение (2.80) для автомодельной тепловой переменной p совпадают с полученным в [37]. Уравнение для автомодельной переменной f в [37] разрешено относительно третьей производной f и имеет вид:

$$\frac{f'''}{\eta} + \left(\frac{f-1}{\eta} \right) \left(\frac{f'}{\eta} \right)' + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(\frac{f'}{\eta} \right)^2 + \frac{p^\gamma}{I_\omega} = 0. \quad (2.82)$$

В уравнение (2.82) входит константа I_ω , в то время как в полученном нами уравнении (2.81) явных констант нет. Сделав в (2.82) замену функции $p \rightarrow a\tilde{p}$ получим, что уравнение (2.82) с использованием новой переменной \tilde{p} запишется в виде:

$$\frac{f'''}{\eta} + \left(\frac{f-1}{\eta}\right)\left(\frac{f'}{\eta}\right)' + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(\frac{f'}{\eta}\right)^2 + a^4 \frac{p^\gamma}{I_\omega} = 0 \quad (2.83)$$

Знак тильда опущен.

Положив $a^4 = I_\omega$, уравнение (2.83) можно привести к виду (2.81).

Таким образом, модель, полученная нами с использованием подхода работы [60] эквивалентна модели, полученной в [37]. Недостатком модели, полученной в [37], является наличие в уравнениях дополнительной константы, затрудняющей ее анализ.

Точное решение для осесимметричного конвективного факела в жидкости с произвольным показателем инверсии. Введем для описания температурного поля над точечным источником тепла q_p новую переменную $\tau_p(\eta)$, связанную с $p_p(\eta)$ соотношением:

$$\tau = p^\gamma \quad (2.84)$$

Индекс p здесь и далее будем опускать.

Тогда задача (2.65)-(2.69) переписется в виде:

$$\left(f'' - \frac{f'}{\eta}\right)' + \frac{ff''}{\eta} - \frac{ff'}{\eta^2} - \frac{(1-\gamma)(f')^2}{2\eta} + \eta\tau = 0, \quad (2.85)$$

$$\eta\tau' + \gamma\text{Pr} f\tau = 0. \quad (2.86)$$

Граничные условия для f и τ приобретают вид:

$$\begin{aligned} f = f' = \tau' = 0 \text{ при } \eta = 0 \\ f'/\eta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.87)$$

Компоненты скорости и температура связаны с автомодельными функциями f и τ соотношениями:

$$v_z = \frac{avz^{\frac{3-\gamma}{4}} f'(\eta)}{r} \quad (2.88)$$

$$v_r = -\frac{v}{r} \left(f(\eta) - \frac{1+\gamma}{4} \eta f'(\eta) \right) \quad (2.89)$$

$$\theta(z, r) = \frac{1}{z} \left(\frac{a^4 v^2}{g \alpha_\gamma T_\infty^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \tau^{\frac{1}{\gamma}}(\eta), \quad (2.90)$$

$$\eta = arz^{\frac{1+\gamma}{4}}. \quad (2.91)$$

Будем искать точное решение системы (2.85)-(2.87) в виде, предложенном в [60]. Предположим, что функция f имеет параметрический вид:

$$f = \frac{b\eta^2}{b + \eta^2} \quad (2.92)$$

Видно, что эта функция удовлетворяет граничным условиям (2.87).

Подставив это выражение в (2.86), получим уравнение для определения τ :

$$\frac{d\tau}{d\eta} + \gamma \text{Pr} b \frac{\eta}{b + \eta^2} \tau = 0 \quad (2.93)$$

Это уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\tau}{\tau} + \frac{\gamma \text{Pr} b}{2} \cdot \frac{d\eta^2}{b + \eta^2} = 0 \quad (2.94)$$

Левая часть этого уравнения является полным дифференциалом.

Поэтому уравнение (2.94) может быть записано:

$$d \ln \left[\tau (b + \eta^2)^{\frac{\gamma \text{Pr} b}{2}} \right] = 0 \quad (2.95)$$

Выражение в квадратных скобках не может зависеть от η , поэтому его следует приравнять к константе. Иными словами должно выполняться соотношение:

$$\tau (b + \eta^2)^{\frac{\gamma \text{Pr} b}{2}} = \text{const} \quad (2.96)$$

Обозначив эту константу через c , получаем выражение для τ :

$$\tau = c(b + \eta^2)^{\frac{\gamma}{2} \text{Pr} b}. \quad (2.97)$$

Подставив (2.97) и (2.92) в (2.85), получаем алгебраическое степенное уравнение:

$$c(\eta^2 + b)^{4 - \frac{\gamma}{2} \text{Pr} b} + 8(4 - b)b^2(\eta^2 + b) - 8(6 - b)b^3 + 2(\gamma - 1)b^4 = 0 \quad (2.98)$$

Введем вспомогательную переменную ξ и рабочие константы E , A и B с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} \xi &= b + \eta^2, \\ E &= 4 - \frac{\gamma}{2} \text{Pr} b, \\ A &= 8(4 - b)b^2, \\ B &= 2(\gamma - 1)b^4 - 8(6 - b)b^3. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Тогда уравнение (2.98) переписется в виде:

$$c\xi^E + A\xi + B = 0 \quad (2.100)$$

Для того, чтобы это уравнение можно было удовлетворить при любом ξ подбором констант, надо устранить его зависимость от переменной ξ . Для этого с помощью задания константы E можно сделать члены с ξ сначала подобными, а затем приравнять их сумму, равную B , к нулю (способ I). Это можно сделать, задав значения констант следующими:

$$E = 1, \quad B = 0. \quad (2.101)$$

Тогда уравнение (2.100) приобретет вид

$$c + A = 0. \quad (2.102)$$

Другой способ (способ II) заключается в устранении с помощью показателя степени E зависимости от ξ первого члена и в исключении из

уравнения (2.100) второго, зависящего от ξ члена. Этому способу соответствует задание константам A и E значений:

$$A = 0, \quad E = 0, \quad (2.103)$$

Тогда уравнение (2.100) приобретет вид

$$c + B = 0. \quad (2.104)$$

Третий способ, удовлетворить уравнение (2.100), заключающийся в приравнивании к нулю констант A , B и c не требует рассмотрения, т.к. он соответствует тривиальному решению $f = \tau = 0$, соответствующему покою изотермической жидкости.

Подставив значения рабочих констант (2.99) в уравнения (2.101)-(2.102), получаем систему уравнений для определения условий, при которых может реализоваться случай I:

$$\begin{cases} 4 - \frac{\gamma}{2} \text{Pr} b = 1, \\ 2(\gamma - 1)b^4 - 8(6 - b)b^3 = 0, \\ c + 8(4 - b)b^2 = 0. \end{cases} \quad (2.105)$$

Показатель инверсии γ в системе (2.105) будем считать внешним параметром, а параметры искомого решения b и c неизвестными. Неизвестным будем считать и число Прандтля Pr .

Второе уравнение этой системы позволяет определить параметр b . Оно имеет два решения. Решение $b = 0$ отбрасываем, поскольку в этом случае, первое уравнение системы (2.105) превращается в неразрешимое тождество. Второе решение второго уравнения этой системы дает явное выражение

$b = 24/(3 + \gamma)$. Подставляя это выражение в первое и третье уравнения системы (2.105), получаем:

$$(I): \quad b = \frac{24}{3 + \gamma}, \quad c = 18432 \frac{3 - \gamma}{(3 + \gamma)^3}, \quad \text{Pr} = \frac{3 + \gamma}{4\gamma}; \quad (2.106)$$

Видно, что все константы (b , c и Pr) для рассматриваемого случая зависят от показателя инверсии γ .

Подставив выражение для b в (2.92) получим, что автомодельная функция f в этом случае запишется:

$$f(\eta) = \frac{24\eta^2}{24 + (3 + \gamma)\eta^2}. \quad (2.107)$$

Функция τ приобретает вид:

$$\tau(\eta) = 18432 \frac{3 - \gamma}{(3 + \gamma)^3} \left(\frac{24}{3 + \gamma} + \eta^2 \right)^{-3}. \quad (2.108)$$

При $\gamma = 1$ выражения (2.106), (2.107) и (2.108) переходят в выражения для первого точного решения, приведенного в [60].

Подставив значения рабочих констант (2.99) в уравнения (2.103)-(2.104), получаем систему уравнений для определения условий, при которых может реализоваться случай II:

$$\begin{cases} 4 - \frac{\gamma}{2} \text{Pr} b = 0, \\ 8(4 - b)b^2 = 0, \\ c + 2(\gamma - 1)b^4 - 8(6 - b)b^3 = 0. \end{cases} \quad (2.109)$$

Второе уравнение этой системы удовлетворяется при $b = 4$ и $b = 0$.

Случай $b = 0$ отбрасываем, поскольку тогда, как и в рассмотренном выше случае I, первое уравнение системы неразрешимо. Подставляя $b = 4$ в первое

и третье уравнение системы (2.109), получаем явные выражения для b , c и Pr :

$$(II): \quad b = 4, \quad c = 512(3 - \gamma), \quad Pr = \frac{2}{\gamma}. \quad (2.110)$$

Подставив эти значения в (2.92) и (2.97) получаем явные выражения для f и τ :

$$f = \frac{4\eta^2}{4 + \eta^2}, \quad (2.111)$$

$$\tau = 512(3 - \gamma)(4 + \eta^2)^{-4}. \quad (2.112)$$

Константа b для этого случая не зависит от показателя инверсии γ . Поэтому выражение для автомодельной функции f также не зависит от γ и совпадает с выражением, полученным в [60] для случая $\gamma = 1$. Выражение для автомодельной функции τ содержит зависимость от γ и оно совпадает с приведенным в [60] лишь при $\gamma = 1$.

Таким образом, для любого значения показателя инверсии γ существует два значения числа Прандтля $Pr_1 = \frac{3 + \gamma}{4\gamma}$ и $Pr_2 = \frac{2}{\gamma}$ при которых, задача (2.85)-(2.87) решается точно.

Из (2.108) и (2.112) видно, что при $\gamma = 3$ точное решение приводит к нулевому распределению температуры, т.е. изотермичности конвективного факела. В теории известен пример изотермического конвективного факела [79]. Для реализации такого факела кроме плавучести необходим дополнительный механизм возбуждения движения, например, вдув, как в

упомянутой работе. В нашем случае изотермичность конвективного факела, по-видимому, говорит о неприменимости приближения пограничного слоя для больших значений γ . Поэтому далее мы ограничимся рассмотрением значений показателя инверсии: $\gamma < 3$.

Подставив полученные выражения (2.106)-(2.108) и (2.110)-(2.112) для первого и второго точного решения, соответственно, в (2.88)-(2.91) можно получить явный вид для функции тока, компонент скорости и температуры.

Явный вид $\psi(r, z)$, $v_z(z, r)$, $v_r(z, r)$ и $\theta(z, r)$ для первого точного решения при $\text{Pr} = \frac{3 + \gamma}{4\gamma}$:

$$\psi = \frac{24va^2r^2z^{(1-\gamma)/2}}{24 + (3 + \gamma)a^2r^2z^{-(1+\gamma)/2}} \quad (2.113)$$

$$v_z = \frac{1152a^2vz^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\left((3 + \gamma)a^2r^2z^{\frac{\gamma+1}{2}} + 24 \right)^2} \quad (2.114)$$

$$v_r = -\frac{12va^2rz^{\frac{\gamma+1}{2}} \left(24\gamma + 2(3 + \gamma)a^2r^2z^{\frac{\gamma+1}{2}} + 24 \right)}{\left((3 + \gamma)a^2r^2z^{\frac{\gamma+1}{2}} + 24 \right)^2} \quad (2.115)$$

$$\theta(z, r) = \frac{1}{z} \left(\frac{a^4v^2}{g\alpha_\gamma T_\infty^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{18432(3 - \gamma)}{(3 + \gamma)^3 \left(\frac{24}{3 + \gamma} + a^2r^2z^{\frac{1+\gamma}{2}} \right)^3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.116)$$

Явный вид $\psi(r, z)$, $v_z(z, r)$, $v_r(z, r)$ и $\theta(z, r)$ для второго точного решения при $\text{Pr} = \frac{2}{\gamma}$:

$$\psi = \frac{4va^2r^2z^{(1-\gamma)/2}}{4 + a^2r^2z^{-(1+\gamma)/2}} \quad (2.117)$$

$$v_z = \frac{32a^2 v z^{\frac{\gamma-2}{2}}}{\left(4 + a^2 r^2 z^{\frac{\gamma+1}{2}}\right)^2} \quad (2.118)$$

$$v_r = \frac{4va^2 r z^{\frac{1+\gamma}{2}} \left(-a^2 r^2 z^{\frac{1+\gamma}{2}} + 2\gamma - 2\right)}{\left(4 + a^2 r^2 z^{\frac{\gamma+1}{2}}\right)^2} \quad (2.119)$$

$$\theta = \frac{1}{z} \left(\frac{a^4 v^2}{g \alpha_\gamma T_\infty^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{512(3-\gamma)^2}{(3+\gamma) \left(4 + ar z^{\frac{1+\gamma}{2}}\right)^4}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.120)$$

2.3 Выводы

1. Рассмотрена задача о конвективном факеле над линейным источником тепла в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры. В приближение пограничного слоя для показателя температурной инверсии плотности $\gamma < 5$ получены новые точные решения задачи для избранных значений числа Прандтля $Pr = 2/\gamma$ и $Pr = (4 + \gamma)/9\gamma$. Численное исследование задачи показало совпадение с результатами аналитического исследования.

2. Рассмотрена задача о конвективном факеле над точечным источником тепла в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры. В приближение пограничного слоя для показателя температурной инверсии плотности $\gamma < 3$ аналитически получены новые точные решения задачи для избранных значений числа Прандтля $Pr = 2/\gamma$ и $Pr = (3 + \gamma)/4\gamma$.

Глава 3. Возникновение проникающей конвекции в слое с заданным тепловым потоком

В настоящей главе рассматривается возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости с температурной инверсией плотности в условиях заданного теплового потока на твердой нижней и верхней свободной границах. Формулируется новая краевая задача для амплитуд возмущений состояния механического равновесия. Задача решается аналитически в длинноволновом приближении и численно для возмущений с конечной длиной волны. Определяется структура критических возмущений.

Изложение базируется на работах [134,136].

3.1 Определяющие уравнения и состояние механического равновесия

Рассмотрим плоский бесконечный горизонтальный слой (см. рис. 3.1) высоты h , находящийся в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения \vec{g} .

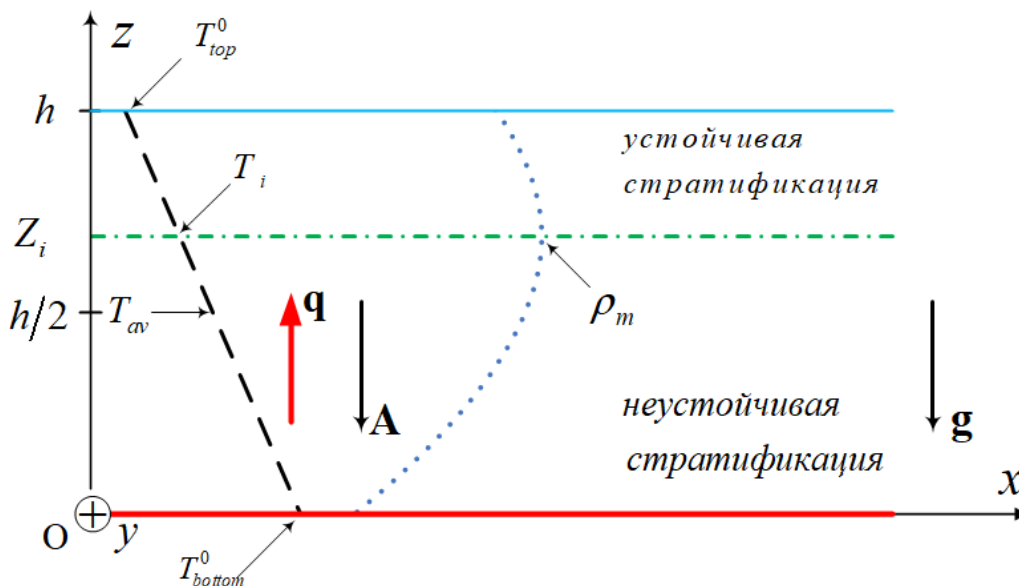


Рис. 3.1 Геометрия задачи о начале конвекции талой воды в бесконечном горизонтальном слое. Введена декартова система координат (x, y, z) . Верхняя граница свободная и недеформируемая, нижняя твердая.

Нижняя граница твердая, верхняя – свободная недеформируемая. Эффектами испарения, излучения и термокапиллярным, пренебрегаем. На

обеих границах задан постоянный вертикальный тепловой поток \vec{q} . Зависимость плотности от температуры принимается квадратичной, в соответствии с формулой (1.2). Такая зависимость с высокой степенью точности описывает поведение плотности чистой воды при нормальном давлении в интервале температур от 0 до 8°C.

Запишем уравнения свободной тепловой конвекции жидкости с температурной инверсией плотности в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho_m} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} - \alpha_2 \vec{g} (T - T_i)^2 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T &= \chi \Delta T, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь p – добавка к гидростатическому распределению давления в неподвижной жидкости при $T_i = 4.00^\circ \text{C}$, $\alpha_2 = 0.8 \cdot 10^{-5} (\text{C})^{-2}$. Коэффициенты кинематической вязкости ν и температуропроводности χ полагаются постоянными.

Граничные условия, соответствующие заданию постоянного вертикального теплового потока, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} &= -A, \\ z = h: \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -A \end{aligned} \quad (3.2)$$

где A – величина заданного вертикального градиента температуры, $A > 0$ соответствует подогреву снизу.

Задача (3.1)-(3.2) имеет однопараметрическое семейство решений, соответствующих состоянию механического равновесия:

$$\vec{v}_0 = 0, \quad T_0 = T_i + A(Z_i - z), \quad p_0 = -\frac{1}{3} \alpha g \rho_m A^2 (Z_i - z)^3 + \text{const}, \quad (3.3)$$

где введено обозначение Z_i для вертикальной координаты точки инверсии.

Распределение плотности в состоянии механического равновесия описывается формулой

$$\rho_0 = \rho_m \left(1 - \alpha A^2 (z - Z_i)^2 \right) \quad (3.4)$$

Величина Z_i играет роль параметра семейства, причем свойства устойчивости равновесного решения, различны при разных Z_i . Этим ситуация отличается от задачи устойчивости равновесия с линейной зависимостью плотности от температуры в приближении Буссинеска при фиксированном тепловом потоке на границах; там также имеется семейство решений, однако все решения семейства эквивалентны с точки зрения устойчивости, поэтому обычно факт существования такого семейства вообще не упоминается.

Из (3.4) следует, что максимальная плотность жидкости $\rho = \rho_m$ достигается при $z = Z_i$. В зависимости от начальной средней температуры жидкости и величины теплового потока через слой, Z_i может быть как вне слоя, так и внутри его. При $Z_i > h$ имеет место неустойчивая стратификация во всем слое жидкости; при $0 < Z_i < h$ стратификация неустойчива лишь в нижней части слоя, а именно, при $0 < z < Z_i$; при $Z_i \leq 0$ во всем слое – устойчивая стратификация.

3.2 Постановка задачи об устойчивости механического равновесия

Рассмотрим устойчивость состояния (3.3) по отношению к малым возмущениям. Будем полагать, что возмущения скорости не имеют компоненту вдоль оси y , т.е. $v'_y = 0$, а две другие компоненты скорости, возмущения температуры и давления не зависят от y . Тогда малые возмущения состояния механического равновесия (3.3) будут плоскими:

$$v_x = v'_x(x, z), \quad v_z = v'_z(x, z), \quad T = T_0 + \mathcal{Q}(x, z), \quad p = p_0 + p'(x, z) \quad (3.5)$$

Подставив (3.5) в (3.1), (3.2) и линеаризовав получившиеся уравнения, получаем задачу для малых возмущений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + 2\alpha g A (Z_i - z) \mathcal{G} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} &= \chi \Delta \mathcal{G} + A v_z, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}z = 0: \quad v_x &= 0, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} = 0 \\ z = h: \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} &= 0, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{3.7}$$

Штрих у возмущений давления и компонент скоростей опущен.

Введем в рассмотрение функцию тока ψ и завихренность φ малых возмущений в соответствии в выражениями:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x},\tag{3.8}$$

$$\varphi = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}.\tag{3.9}$$

Продифференцировав первое уравнение системы (3.6) по z и вычтя из него второе, продифференцированное по x , исключаем из числа переменных задачи давление и получаем уравнение для завихренности φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \Delta \varphi - 2\alpha g A (Z_i - z) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}.\tag{3.10}$$

Подставив (3.8) в (3.9), получаем уравнение Пуассона:

$$\varphi + \Delta \psi = 0.\tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в (3.10) получаем в размерной форме уравнения для определения функции тока и температуры малых возмущений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= \nu \Delta^2 \psi + 2\alpha g A (Z_i - z) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \chi \Delta \vartheta + A \frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Граничные условия (3.7) переписываются в виде:

$$\begin{aligned}z = 0: \quad & \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \\ z = h: \quad & \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (3.13)$$

Задача (3.12)-(3.13) позволяет определить структуру и эволюцию малых возмущений функции тока и температуры.

Введем в рассмотрение нормальные возмущения компонент скорости, температуры и функции тока:

$$v_x = X(z) \exp(\lambda t + ikx), \quad (3.14)$$

$$v_z = W(z) \exp(\lambda t + ikx), \quad (3.15)$$

$$\vartheta = \theta(z) \exp(\lambda t + ikx), \quad (3.16)$$

$$\psi = \Psi(z) \exp(\lambda t + ikx). \quad (3.17)$$

Здесь λ – инкремент нарастания возмущения, k – волновое число. Подставив разложения (3.16) и (3.17) в систему (3.12)-(3.13) получаем задачу для определения амплитуд возмущений функции тока Ψ и температуры θ :

$$\lambda \Delta \Psi = \nu \Delta^2 \Psi + ik 2\alpha g A (Z_i - z) \theta \quad (3.18)$$

$$\lambda \theta = \chi \Delta \theta + ik A \Psi$$

$$z = 0: \quad \Psi' = 0, \quad \Psi = 0, \quad \theta' = 0 \quad (3.19)$$

$$z = h: \quad \Psi'' = 0, \quad \Psi = 0, \quad \theta' = 0$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по z , $\Delta = \partial^2 / \partial z^2 - k^2$

Подставив (3.17) в (3.8) получаем связь между амплитудами функции тока и компонент скоростей:

$$X = -\Psi' \quad (3.20)$$

$$W = ik \Psi \quad (3.21)$$

С помощью последнего соотношения из задачи (3.18)-(3.19) можно получить

задачу для переменных W, θ :

$$\lambda \Delta W = \nu \Delta^2 W - 2\alpha g A k^2 (Z_i - z) \theta \quad (3.22)$$

$$\lambda \theta = \chi \Delta \theta + A W$$

$$z = 0: W' = 0, W = 0, \theta' = 0 \quad (3.23)$$

$$z = h: W'' = 0, W = 0, \theta' = 0$$

Задачу (3.22)-(3.23) удобно записать в безразмерном виде. Выберем в качестве единиц расстояния, времени, скорости, температуры, инкремента λ и волнового числа $k - h, h^2 / \chi, \chi / h, hA, \chi / h^2$ и $1/h$. Подставляя эти соотношения в (3.22), (3.23), получаем:

$$\lambda \Delta W \frac{1}{\text{Pr}} = \Delta^2 W - k^2 Ra (z_i - z) \theta, \quad (3.24)$$

$$\lambda \theta = \Delta \theta + W,$$

$$z = 0: W' = 0, W = 0, \theta' = 0, \quad (3.25)$$

$$z = 1: W'' = 0, W = 0, \theta' = 0.$$

Где $Ra = 2\alpha g \frac{A^2 h^5}{\nu \chi}$ - аналог числа Релея, $\text{Pr} = \chi / \nu$ - Число Прандтля, а

$z_i = Z_i / h$ - безразмерная координата точки инверсии в теплопроводном режиме.

Задача имеет два пространственных масштаба, -высота полости h и положение точки инверсии Z_i . Проведем обезразмеривание для случая, когда пространственным масштабом выбрано Z_i . Выберем теперь в качестве единиц расстояния, времени, скорости, температуры, инкремента λ и волнового числа $k - Z_i, Z_i^2 / \chi, \chi / Z_i, Z_i A, \chi / Z_i^2$ и $1/Z_i$. Подставляя эти соотношения в (3.22), (3.23), получаем:

$$\lambda \Delta W \frac{1}{\text{Pr}} = \Delta_i^2 W - Ra_i k_i^2 (1 - z) \theta \quad (3.26)$$

$$\lambda \theta = \Delta_i \theta + W$$

$$z = 0: W' = 0, W = 0, \theta' = 0 \quad (3.27)$$

$$z = H: W'' = 0, W = 0, \theta' = 0$$

Безразмерные критерии этой задачи связаны с критериями задачи (3.24)-(3.25) соотношениями:

$$Ra_i = Ra z_i^5 \quad (3.28)$$

$$H = h / Z_i = z_i^{-1} \quad (3.29)$$

$$k_i = z_i k \quad (3.30)$$

Заметим, что параметр Ra и Ra_i квадратично зависят от градиента температуры и поэтому случаи подогрева снизу или сверху при фиксированном z_i эквивалентны. Смена знака Ra может интерпретироваться только как смена знака силы тяжести, поэтому отрицательные Ra соответствуют слою с твердой верхней и свободной нижней границей. В дальнейшем ограничимся случаем $Ra > 0$.

Задача (3.6), (3.7) инвариантна относительно преобразования

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} + C, \quad p \rightarrow p - \alpha \rho_m g A (Z_i - z)^2 C \quad (3.31)$$

где C – произвольная константа.

Существование такой инвариантности обусловлено отмеченным выше фактом наличия однопараметрического семейства равновесных состояний и представляет собой фактически генератор сдвига вдоль этого семейства. Это означает, что спектральная задача (3.26), (3.27) должна иметь, в частности, такое решение, для которого инкремент $\lambda(k)$ обращается в нуль при $k \rightarrow 0$. Такие решения принято называть голдстоуновскими модами [17]. Они типичны для многих задач физики и механики сплошных сред, инвариантных относительно какой-либо непрерывной группы.

Поведение голдстоуновской моды при малых k может быть различно. Если вещественная часть инкремента при малых k положительна, то говорят о длинноволновой неустойчивости, при этом скорость роста возмущений стремится к нулю при стремлении длины волны возмущений к бесконечности, однако отлична от нуля при сколь угодно большой, но конечной длине волны. Такая ситуация типична для задач конвективной

устойчивости как равновесия, так и движения в условиях фиксированного теплового потока на границах [1, 5, 17].

3.3 Длинноволновая неустойчивость

Для длинноволновых возмущений задача (3.26), (3.27) решалась аналитически с помощью разложения W , \mathcal{G} и λ в ряды по степеням волнового числа k :

$$W = W_0 + W_2 k^2 + W_4 k^4, \quad (3.32)$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_2 k^2 + \theta_4 k^4, \quad (3.33)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_2 k^2 + \lambda_4 k^4. \quad (3.34)$$

Здесь учтено, что волновое число входит в задачу (3.26), (3.27) только как k^2 . Поэтому в разложениях представлены только четные степени по k .

Для нейтральных возмущений полагаем $\lambda_0 = 0$. Подставляя ряды (3.32)-(3.34) в (3.26), (3.27) и группируя члены при разных степенях k , можно получить замкнутые уравнения. Для нулевых членов разложения W и θ получаем систему:

$$W_0^{IV} = 0, \quad \theta_0'' = 0. \quad (3.35)$$

Решая ее с граничными условиями

$$z = 0: \mathcal{G}' = W_0 = W_0' = 0, \quad (3.36)$$

$$z = 1: \mathcal{G}' = W_0 = W_0'' = 0.$$

получаем, что $\mathcal{G}_0 = C$, а $W_0 = 0$. Где C — произвольная постоянная.

Аналогичным образом из задачи (3.18)-(3.19) можно показать, что $\Psi_0 = 0$.

Положив $C = 1$, получаем, что в нулевом приближении:

$$\lambda_0 = 0, \quad \Psi_0 = 0, \quad W_0 = 0, \quad \theta_0 = 1. \quad (3.37)$$

Это означает, что при $k = 0$ имеется нейтральное возмущение с нулевой скоростью и независимым от координат возмущением температуры. Поведение этого возмущения при отличных от нуля волновых числах можно определить из рассмотрения следующих порядков разложения (3.32)-(3.34).

Вид первых двух ненулевых членов разложения $\Psi(k)$ можно получить подставив разложение W в соотношение (3.20):

$$\Psi = -ikW_2 - ik^3W_4 \quad (3.38)$$

Как следует из этого выражения, амплитуда функции тока мнимая и разложение по волновому числу содержит нечетные степени, начиная с первой. Первые два ненулевых члена разложения X по k можно получить, подставив (3.38) в (3.20):

$$X = ikW_2' + ik^3W_4'. \quad (3.39)$$

В первом порядке по k^2 получаем уравнения, которым должны удовлетворять $W_2(z)$, $\theta_2(z)$ и λ_2 :

$$W_2^{IV} + \text{Ra}_\alpha(z - z_i) = 0, \quad (3.40)$$

$$\lambda_2\theta_0 = \theta_2'' - \theta_0 + W_2. \quad (3.41)$$

Для $W_2(z)$ выполняются граничные условия:

$$z = 0: W_2 = W_2' = 0, \quad (3.42)$$

$$z = 1: W_2 = W_2'' = 0.$$

Для $\theta_2(z)$ выполняются граничные условия

$$z = 0: \theta_2' = 0, \quad (3.43)$$

$$z = 1: \theta_2' = 0.$$

$W_2(z)$ однозначно определяется из уравнения (3.40) и граничных условий (3.42):

$$W_2(z) = \frac{z^2 \text{Ra}}{240} (1-z) (2z^2 - 10zz_i + 2z + 15z_i - 7). \quad (3.44)$$

Уравнение (3.41), с учетом (3.37) можно переписать в виде системы двух уравнений:

$$\lambda_2 + 1 = C_1, \quad (3.45)$$

$$\frac{d}{dz} \theta_2' + W_2 = C_1. \quad (3.46)$$

Здесь C_1 , - независящая от z константа. Решая уравнение (3.46) с учетом граничных условий (3.43) и (3.44), находим функцию $\theta_2(z)$ и значение константы C_1 :

$$\theta_2 = z^2 \frac{40(z - 7z_i)z^4 + 6(175z_i - 63)z^3 + 70(7 - 15z_i)z^2 + 35(9z_i - 5)}{201600} Ra, \quad (3.47)$$

$$C_1 = \frac{z_i - 5/9}{320} Ra. \quad (3.48)$$

Из (3.45) находим λ_2 :

$$\lambda_2 = \frac{(z_i - 5/9)Ra - 320}{320}. \quad (3.49)$$

Во втором порядке по k^2 получаем уравнения, которым должны удовлетворять $W_4(z)$, $\theta_4(z)$ и λ_4 :

$$\frac{\lambda_2}{Pr} W_2'' = W_4^{IV} - 2W_2'' + Ra_\alpha (z - z_i) \theta_2, \quad (3.50)$$

$$\lambda_2 \theta_2 + \lambda_4 \theta_0 = \theta_4'' - \theta_2 + W_4. \quad (3.51)$$

Для $W_4(z)$ выполняются граничные условия:

$$\begin{aligned} z = 0: W_4 = W_4' = 0, \\ z = 1: W_4 = W_4'' = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Для $\theta_4(z)$ выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} z = 0: \theta_4' = 0, \\ z = 1: \theta_4' = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Решая уравнение (3.50) с граничными условиями (3.52) получаем:

$$W_4(z) = \frac{z^2 Ra_\alpha}{1596672000 Pr} (f_2 - zf_3 - 660f_1 z^2). \quad (3.54)$$

Где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
f_1 = & -5880 + 4536z - \frac{25}{6} \text{Pr} \text{Ra} z^5 z_i^2 - \frac{8}{3} \text{Pr} \text{Ra} z^5 z_i + \frac{15}{2} \text{Pr} \text{Ra} z^4 z_i^2 - \frac{7}{2} \text{Pr} \text{Ra} z^4 z_i \\
& - \frac{21}{2} \text{Pr} \text{Ra} z_i^2 z^2 + \frac{9}{2} \text{Pr} \text{Ra} z_i z^3 + \frac{35}{6} \text{Pr} \text{Ra} z_i z^2 + \frac{2}{3} \text{Pr} \text{Ra} z_i^2 z^6 - \frac{16}{33} \text{Pr} \text{Ra} z_i z^7 \\
& + \frac{5}{2} \text{Pr} \text{Ra} z_i z^6 + 960z^3 \text{Pr} + \frac{4}{99} \text{Pr} \text{Ra} z^8 - \frac{9}{10} \text{Pr} \text{Ra} z^6 + \frac{35}{18} \text{Pr} \text{Ra} z^5 - 9072z \text{Pr} \\
& - \frac{5}{2} \text{Ra} z^3 \text{Pr} + 11760 \text{Pr} - 6720 \text{Pr} z^2 z_i + 25200 \text{Pr} z z_i - \frac{3}{2} \text{Ra} z_i z^3 - \frac{21}{2} \text{Ra} z_i^2 z^2 \\
& + \frac{315}{8} \text{Ra} z_i^2 z - \frac{721}{20} \text{Ra} z_i z + \frac{35}{6} \text{Ra} z_i z^2 + \frac{161}{4} \text{Ra} z_i - \frac{5}{6} \text{Ra} z^3 - \frac{315}{8} \text{Ra} z_i^2 \\
& - 25200 \text{Pr} z_i + \frac{63}{8} \text{Ra} z + 12600 z_i - \frac{245}{24} \text{Ra} - 480z^3 - 12600 z_i z + 3360 z_i z^2,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & 15840 \text{Pr} \text{Ra} z_i^2 - 18245 \text{Pr} \text{Ra} z_i - 10395 \text{Ra} z_i^2 + 5309 \text{Pr} \text{Ra} - 6652800 \text{Pr} z_i + \\
& 11418 \text{Ra} z_i + 3611520 \text{Pr} - 3135 \text{Ra} + 3326400 z_i - 1805760,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
f_3 = & \frac{41345}{48} \text{Pr} \text{Ra} z_i + \frac{155925}{16} \text{Ra} z_i^2 - \frac{24185}{48} \text{Pr} \text{Ra} + 6237000 \text{Pr} z_i \\
& - \frac{85635}{8} \text{Ra} z_i - 3385800 \text{Pr} + \frac{47025}{16} \text{Ra} + \frac{61}{48} f_2 - 3118500 z_i + 1692900.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Подставив выражения (3.54), (3.47) и (3.49) в (3.51) получаем уравнение второго порядка для определения $\theta_4(z)$. Подставив результат интегрирования этого уравнения в граничные условия (3.53), получаем выражение для λ_4 :

$$\begin{aligned}
\lambda_4 = & \text{Ra} \left(-115830 z_i^2 \text{Ra} + 129987 z_i \text{Ra} - 74131200 z_i \text{Pr} + 42007680 \text{Pr} - \right. \\
& - 38389 z_i \text{Ra} \text{Pr} + 28080 z_i^2 \text{Ra} \text{Pr} + 13525 \text{Ra} \text{Pr} - 36465 \text{Ra} + \\
& \left. + 37065600 z_i - 21003840 \right) / (249080832000 \text{Pr}).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Подставив это выражение и (3.49) в (3.34) получаем:

$$\begin{aligned}
\lambda(k, \text{Ra}, \text{Pr}, z_i) = & k^2 \frac{(z_i - 5/9) \text{Ra} - 320}{320} \\
& + k^4 \frac{\text{Ra}}{249080832000 \text{Pr}} \left(28080 z_i^2 \text{Ra} \text{Pr} - 115830 z_i^2 \text{Ra} \right. \\
& - 38389 z_i \text{Ra} \text{Pr} + 129987 z_i \text{Ra} - 74131200 z_i \text{Pr} + 42007680 \text{Pr} \\
& \left. + 37065600 z_i + 13525 \text{Ra} \text{Pr} - 36465 \text{Ra} - 21003840 \right).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Для нейтральных возмущений $\lambda(k, Ra, Pr, z_i) = 0$. Поэтому приравняв к нулю правую часть выражения (3.59) можно получить зависимость критического числа Релея от волнового числа для различных z_i и Pr т.е. нейтральную кривую $Ra_{cr}(k)$. В длинноволновом пределе, т.е. при $k \rightarrow 0$, выражение для критического значения числа Релея $Ra_{cr}(0)$ можно получить из (3.49), положив $\lambda_2 = 0$:

$$Ra_{cr}(0) = 320 / (z_i - 5/9). \quad (3.60)$$

Эта зависимость представлена на Рис. 3.2.

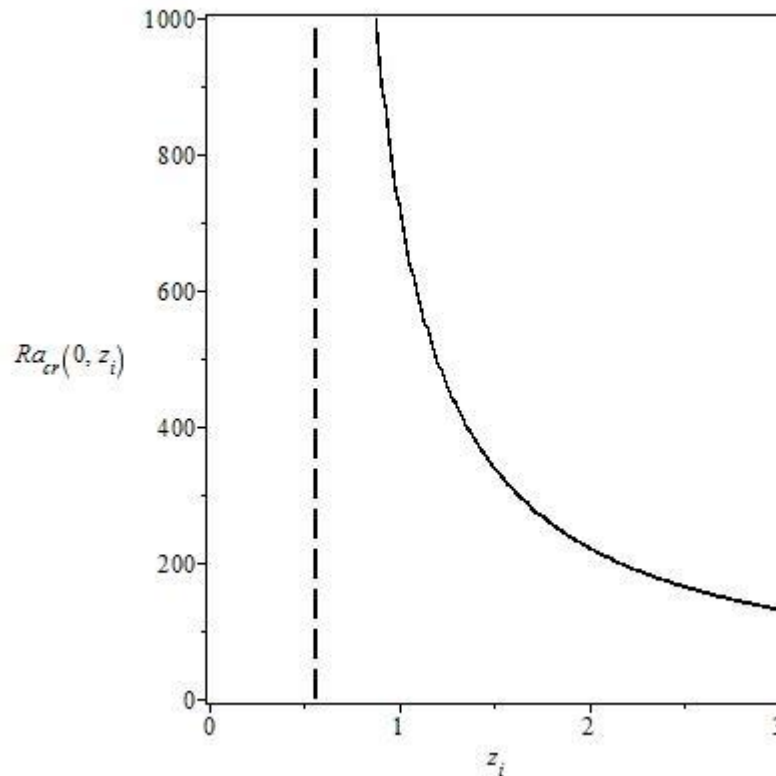


Рис.3.2. Влияние положения координаты инверсии плотности на границу длинноволновой неустойчивости (сплошная линия). Вертикальная штриховая линия соответствует значению $z_i = 5/9$, границе существования длинноволновых возмущений.

При $z_i \rightarrow \infty$ из (3.60) получаем $Ra_{cr}(0)z_i = 320$ (см. Рис. 3.3), что совпадает с известным результатом для жидкости с линейным уравнением состояния, твердой нижней и свободной верхней границей в условиях

фиксированного теплового потока [18] (при $z_i \gg 1$ и замене $Ra z_i \rightarrow Ra$ задача (3.50)-(3.53) переходит в задачу для жидкости с линейным уравнением состояния). Поскольку для случая нижней твердой и верхней свободной поверхности числа Релея положительны, то длинноволновая неустойчивость существует лишь при $z_i > 5/9$, т.е. область длинноволновой неустойчивости на рис.3.3 расположена правее вертикальной штриховой линии. В случае обеих твердых границ длинноволновая неустойчивость существует лишь при $z_i > 1/2$ [71].

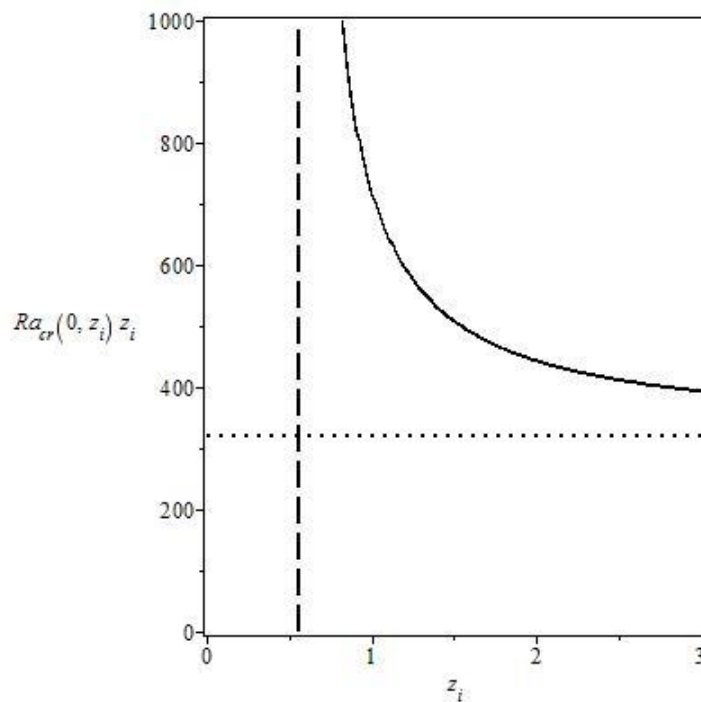


Рис.3.3. Сравнение границы длинноволновой неустойчивости с критическим числом длинноволновой неустойчивости для жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры (горизонтальная пунктирная линия). Вертикальная штриховая линия соответствует значению $z_i = 5/9 \approx 0.56$.

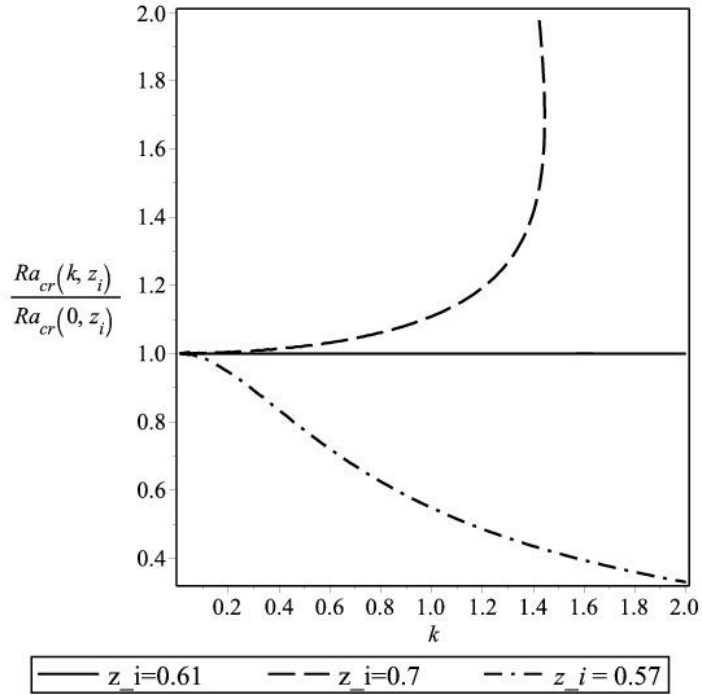


Рис.3.4. Влияние положения точки инверсии z_i на характер нейтральной кривой в длинноволновом приближении.

Чтобы выяснить, являются ли длинноволновые возмущения более опасными, необходимо проанализировать знак выражения (3.58) для λ_4 . Возмущения с конечной длиной волны будут заведомо опаснее длинноволновых, если $\lambda_4 > 0$ при числе Релея, равном $Ra_{cr}(0)$. Подставляя $Ra_{cr}(0)$ из (3.60) в (3.58), получаем

$$\lambda_4 = -\left(40716z_i^2 - 44317z_i + 11881\right) / \left(6006(5 - 9z_i)^2\right) \quad (3.61)$$

Отсюда видно, что $\lambda_4 > 0$ при $z_i < z_i^*$, где $z_i^* \approx 0.6104$, и $\lambda_4 < 0$ при $z_i > z_i^*$. В случае обеих твердых границ $z_i^* \approx 0.6064$ [71].

На рис.3.4 приведены нейтральные кривые, полученные из (3.59) нормированные на значение, получающееся из (3.60). Видно, что при $z_i < z_i^* \approx 0.61$, например, при $z_i = 0.57$ длинноволновые возмущения не являются наиболее опасными. Таким образом, неустойчивость по отношению к длинноволновым возмущениям возможна при $z_i > 5/9$. В области $z_i > z_i^* \approx 0.61$ длинноволновые возмущения наиболее опасны. В оставшейся

области существования длинноволновых возмущений, т.е. при $0.56 < z_i < z_i^* \approx 0.61$, коротковолновые возмущения более опасны, чем длинноволновые.

Напомним, что в жидкости с линейным уравнением состояния (1.1) в условиях фиксированного теплового потока неустойчивость всегда носит длинноволновый характер.

Длинноволновое возмущение, когда волновое число стремится к нулю, имеют форму вытянутой горизонтальной ячейки. Течение в средней части такой ячейки можно считать плоскопараллельным. Профиль такого плоскопараллельного возмущения определяется первым членом в разложении по k амплитуды $X(z)$ компоненты скорости v_x .

Подставив (3.44) в (3.39) получаем явный вид первого члена разложения по k распределения скорости плоскопараллельного течения в среднем сечении ячейки:

$$X_1(z) = \frac{Ra z}{240} (10z^3 - 40z^2 z_i + 75z z_i - 27z - 30z_i + 14) \quad (3.62)$$

Старшие члены в длинноволновом приближении можно отбросить.

Из (3.62) видно, что форма возмущения определяется положением точки инверсии плотности z_i . В области $\frac{5}{9} < z_i < z_i^* \approx 0.61$, где длинноволновые возмущения существуют, но менее опасны, чем коротковолновые, профиль скорости длинноволнового возмущения имеет трехслойную структуру (см. Рис. 3.5. для $z_i = 0.57$). Жидкость в придонной части неустойчиво стратифицированного слоя и приповерхностном слое движется в одном направлении. Между ними находится слой, движущийся в противоположном направлении. Его середина, где скорость возвратного течения максимальна практически совпадает с z_i . Увеличение z_i , т.е. утолщение неустойчиво стратифицированного слоя, приводит к изменению профиля скорости длинноволнового возмущения.

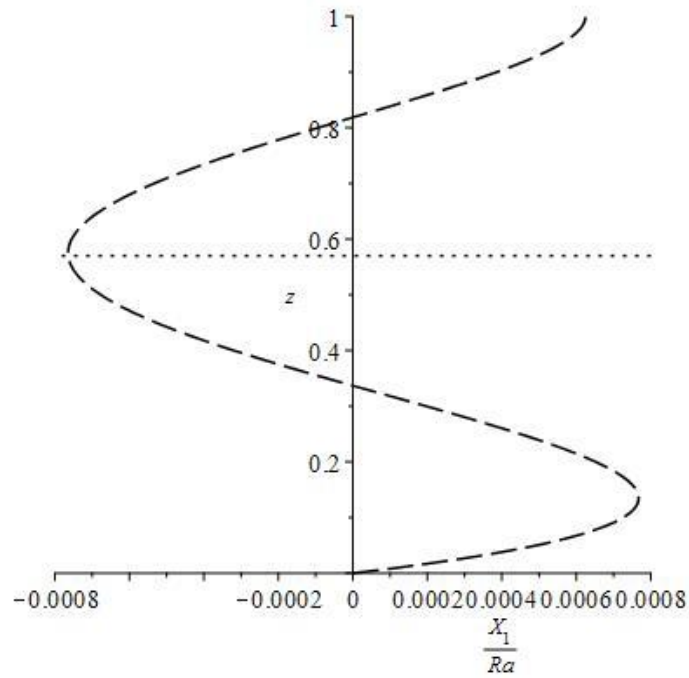


Рис. 3.5. Профиль нормированной на число Релея Ra горизонтальной скорости нейтрального длинноволнового возмущения при $z_i = 0.57$. Точечной горизонтальной линией отмечена верхняя граница неустойчиво стратифицированного слоя.

При $z_i = 0.6104$, как это видно из (3.61), коротковолновые возмущения исчезают, и длинноволновые возмущения становятся наиболее опасными. Профиль скорости этого возмущения представлен на Рис. 3.6. Сравнение с Рис. 3.5 показывает, что увеличение толщины неустойчиво стратифицированного слоя привело к исчезновению третьего, верхнего слоя и наиболее опасное возмущение становится двухслойным, причем граница между слоями, движущимися в противоположных направлениях расположена в глубине неустойчиво стратифицированного слоя.

Увеличение z_i приводит к тому, что максимальная скорость течения достигается на верхней свободной границе слоя (см. Рис.3.7а для $z_i = 0.8$). Дальнейшее увеличение z_i не приводит к качественному изменению формы критического возмущения (см. Рис.3.7б для $z_i = 0.8$).

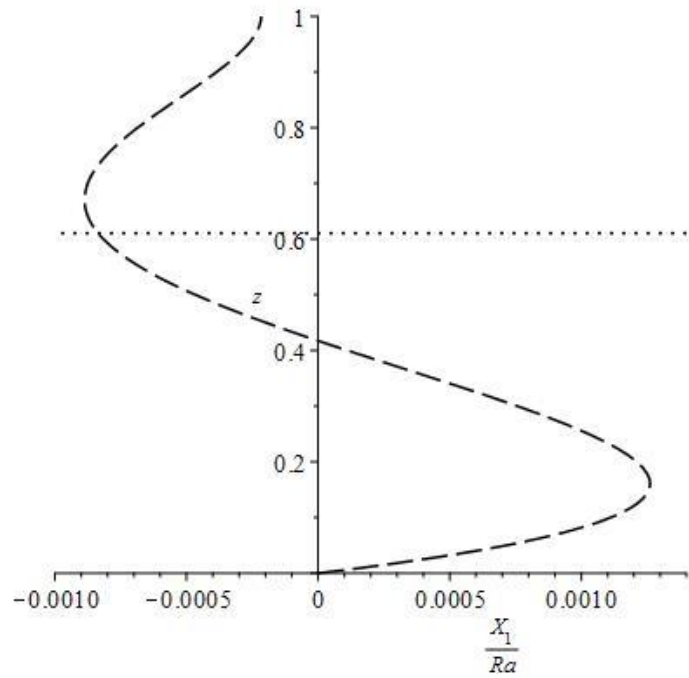


Рис.3.6. Профиль нормированной на число Релея Ra горизонтальной скорости нейтрального длинноволнового возмущения при $z_i = 0.6104$. Точечной горизонтальной линией отмечена верхняя граница неустойчиво стратифицированного слоя.

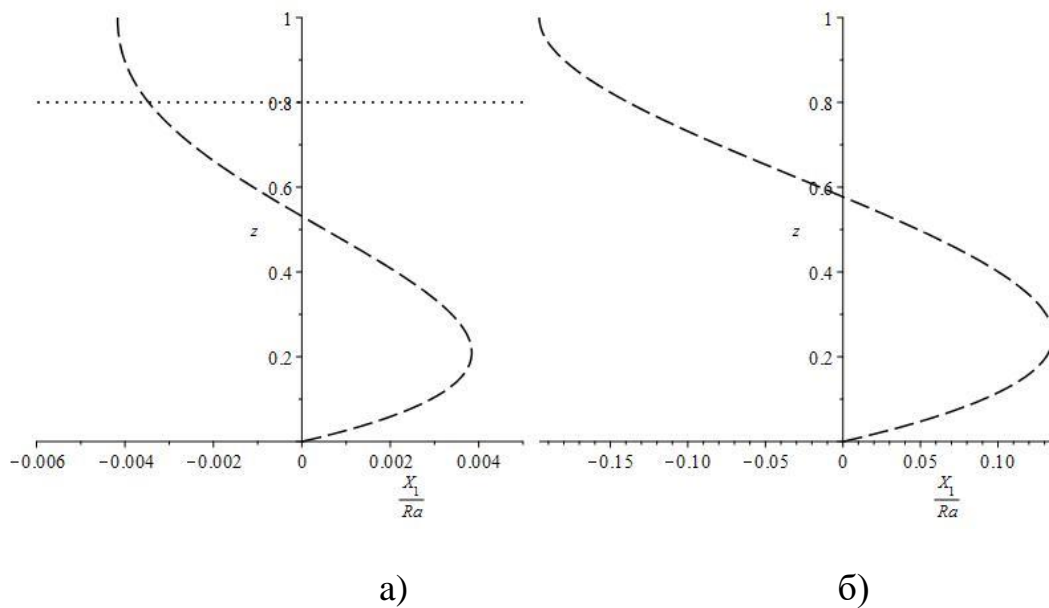


Рис.3.7. Профиль нормированной на число Релея Ra горизонтальной скорости нейтрального длинноволнового возмущения при $z_i = 0.8$ (а) и $z_i = 10$ (б). Точечной горизонтальной линией отмечена верхняя граница неустойчиво стратифицированного слоя.

3.4 Ячейстая неустойчивость

Для численного исследования устойчивости равновесия относительно монотонных ячейстых возмущений сведем краевую задачу (3.50),(3.51) к задаче Коши. Для этого запишем ее в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dz} &= y_2, \\
 \frac{dy_2}{dz} &= y_6, \\
 \frac{dy_3}{dz} &= -y_1 + (\lambda \text{Pr} + k^2)y_5, \\
 \frac{dy_4}{dz} &= (\lambda + 2k^2)y_6 - k^2(k^2 + \lambda)y_1 + k^2 Ra(z_i - z)y_5, \\
 \frac{dy_5}{dz} &= y_3, \\
 \frac{dy_6}{dz} &= y_4.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Здесь введены обозначения: $y_1 = W$, $y_2 = W'$, $y_3 = \mathcal{G}'$, $y_4 = W'''$, $y_5 = \mathcal{G}$, $y_6 = W''$.

Начальные значения функций y_1, y_2, y_3 получаются из граничных условий (3.52),(3.53):

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0 \text{ при } z = 0. \tag{3.64}$$

Задавая различные начальные значения оставшимся функциям y_4, y_5, y_6 , можно построить три линейно независимых решения и, комбинируя их, удовлетворить условиям (3.52),(3.53) на границе $z = 1$:

$$y_1 = y_3 = y_6 = 0. \tag{3.65}$$

Эти решения будем находить, используя следующие три варианта начальных условий:

$$\begin{aligned}
y_{11} = y_{21} = y_{31} = y_{51} = y_{61} = 0, y_{41} = 1, \\
y_{12} = y_{22} = y_{32} = y_{42} = y_{62} = 0, y_{52} = 1, \\
y_{13} = y_{23} = y_{33} = y_{43} = y_{53} = 0, y_{63} = 1,
\end{aligned} \tag{3.66}$$

где вторая цифра в индексе обозначает номер линейно независимого решения.

Решение системы (3.63) с начальными условиями (3.64) представим в виде:

$$y_i = C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + C_3 y_{i3}. \tag{3.67}$$

Условие существования нетривиального решения (3.67), удовлетворяющего граничным условиям (3.65), приводит к характеристическому уравнению:

$$\Delta(\lambda, Pr, k, Ra, z_i) = \begin{vmatrix} y_{11}(1) & y_{12}(1) & y_{13}(1) \\ y_{31}(1) & y_{32}(1) & y_{33}(1) \\ y_{61}(1) & y_{62}(1) & y_{63}(1) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.68}$$

Для любой комбинации волнового числа k и физических параметров задачи (Pr, Ra, z_i) интегрируя систему (3.63) для трех наборов граничных условий и подбирая λ можно удовлетворить условию (3.68) и по знаку λ определить нарастает или затухает рассматриваемое нормальное возмущение. Наложив условие нейтральности возмущения $\lambda = 0$ можно получить нейтральную кривую:

$$Ra_{cr} = Ra_{cr}(k, z_i). \tag{3.69}$$

Заметим, что число Прандтля из рассмотрения исчезает, поскольку оно входит в систему (3.63) лишь в качестве сомножителя λ .

Численное интегрирование системы линейных уравнений (3.63) с граничными условиями (3.66) проводилось с использованием метода прямого пошагового интегрирования Рунге-Кутты-Фельдберга 4-5 порядка точности с автоматическим выбором шага [21–23].

На рис. 3.8 представлены полученные описанным в предыдущем параграфе методом три нейтральных кривых для значений показателя инверсии $z_i = 0.57$, $z_i = 0.61$ и $z_i = 0.7$.

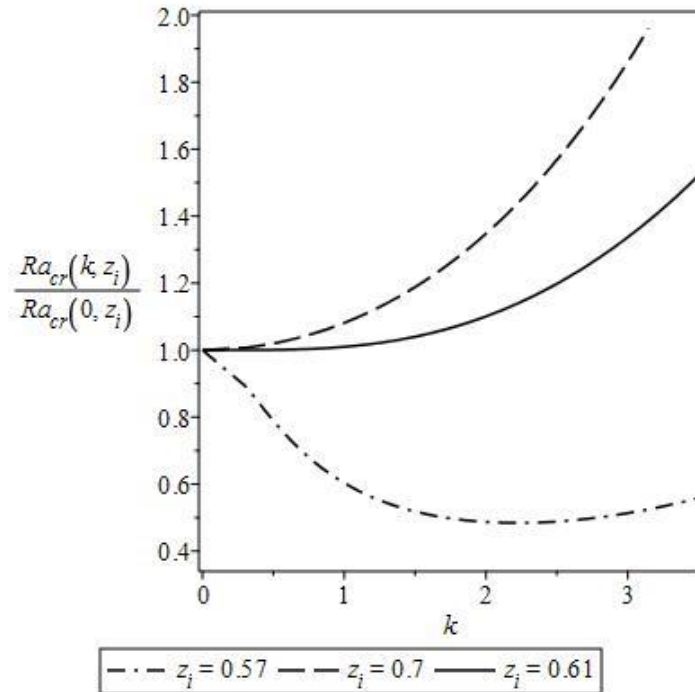


Рис. 3.8. Характерные нейтральные кривые, полученные в расчетах. Влияние положения точки инверсии z_i на характер нейтральной кривой.

Видно, что в области длинных волн, т.е. при $k < 1$, участки нейтральных кривых хорошо согласуются с нейтральными кривыми, полученными в длинноволновом приближении для этих же значений показателя инверсии (см. Рис. 3.4.). Сравнение рис. 3.4 и рис. 3.8 показывает, что в области конечных значений длины волны возмущения, т.е. при $k > 1$ рассмотренное в предыдущем параграфе длинноволновое приближение неприменимо. Так расчет нейтральной кривой для $z_i = 0.57$ (штрих-пунктирная линия на рис. 3.8) дает минимум при $k_m = 2.12$, а соответствующая нейтральная кривая, полученная в длинноволновом приближении асимптотически стремится к нулю (штрих-пунктирная линия на рис.3.4). Качественно отличаются в области конечных длин волн и нейтральные кривые для $z_i = 0.6104$ и $z_i = 0.7$.

Как было показано в параграфе 3.2., в области значений показателя инверсии $z_i < 0.55$, длинноволновые возмущения отсутствуют. Расчеты показывают, что в этой области значений показателя инверсии при всех положительных значениях z_i , т.е. пока в слое существует неустойчивая стратификация, возможна неустойчивость равновесия относительно возмущений с конечным волновым числом.

Введем в рассмотрение модифицированное число Релея Ra^i и модифицированное волновое число k^i , определенные через толщину неустойчиво стратифицированного слоя, т.е. через z_i . Ra^i и k^i связаны с определенными по толщине слоя h (см. Рис.4.1.) числом Релея Ra и волновым числом k соотношениями:

$$Ra^i = z_i^5 Ra, \quad k^i = k / z_i. \quad (3.70)$$

На рис. 3.9 приведены две нейтральных кривых $Ra^i(k^i, z_i)$, соответствующих значениям положения точки инверсии в середине слоя ($z_i = 1/2$) и на расстоянии одной трети ($z_i = 1/3$) от дна слоя. При этих значениях z_i в нижней части слоя (при $0 < z < z_i$) реализуется неустойчивая стратификация, а в верхней (при $z_i < z < 1$) – устойчивая. Как видно из рисунка, нейтральные кривые $Ra^i(k^i)$ имеют вид, характерный для релеевской неустойчивости в подогреваемом снизу горизонтальном слое.

Нейтральные кривые при уменьшении z_i стремятся к предельному положению, так, что при $z_i \leq 1/3$ они практически не отличаются друг от друга. Это означает, что неустойчивость определяется слоем с неустойчивой стратификацией ($0 < z < z_i$), а толщина устойчиво стратифицированного слоя, находящегося над ним, перестает влиять на возникновение конвекции. Значения критических чисел Релея и волновых чисел, определенных как по

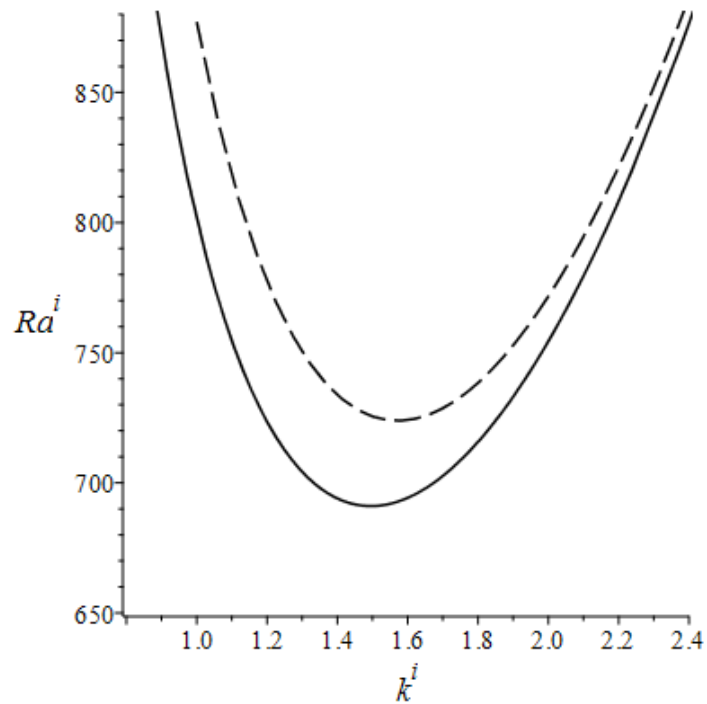


Рис. 3.9. Нейтральные кривые для положения точки инверсии $z_i = 0.5$ (штриховая линия) и $z_i = 0.333$ (сплошная линия).

толщине всего слоя, так и по толщине только неустойчиво стратифицированного слоя, для различных значений $0.2 \leq z_i < 0.57$ приведены в Таблице 3.1.

На рис. 3.10 представлена карта устойчивости равновесия как относительно коротковолновых возмущений (сплошная линия), так и относительно длинноволновых возмущений (штриховая линия). В области I равновесие устойчиво относительно обоих типов возмущений. В области II(III) механическое равновесие жидкости неустойчиво относительно возмущений с конечным (нулевым) волновым числом.

Как было показано выше, при $z_i < 5/9$ неустойчивость равновесия определяется конечноволновыми возмущениями, нейтральные кривые имеют вид, представленный на рис. 3.9. При $5/9 < z_i < 0.61$ наиболее опасными также являются конечноволновые возмущения, но наряду с ними возможны

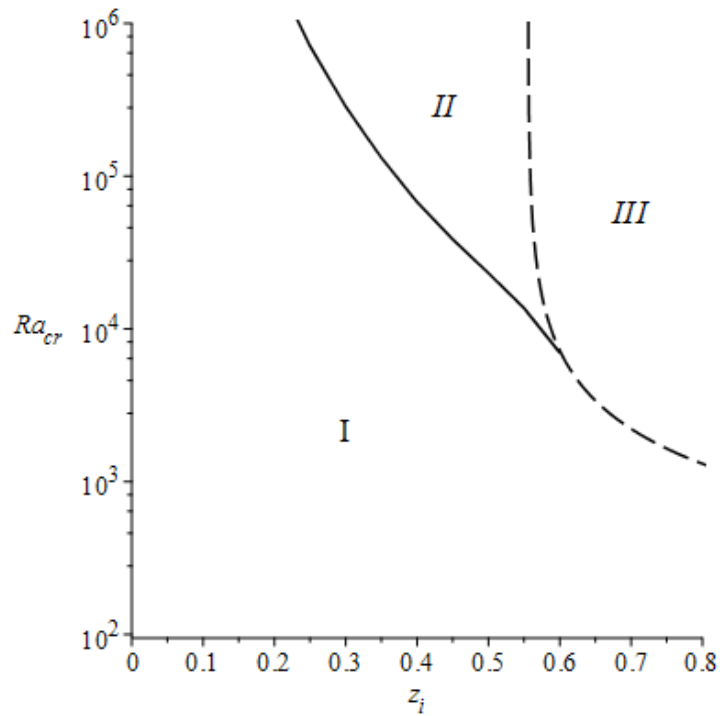


Рис. 3.10. Границы устойчивости равновесия относительно длинноволновых (штриховая линия) и коротковолновых (сплошная линия) возмущений.

Таблица 3.1

z_i	k_m	Ra_{cr}	k_m^i	Ra_{cr}^i
0.200	7.517	$2.158 \cdot 10^6$	1.503	690.7
0.250	6.000	$7.073 \cdot 10^5$	1.500	690.8
0.300	5.011	$2.843 \cdot 10^5$	1.503	691.0
0.333	4.472	$1.680 \cdot 10^5$	1.491	691.1
0.375	3.951	$9.298 \cdot 10^4$	1.482	689.5
0.400	3.755	$6.756 \cdot 10^4$	1.502	691.8
0.500	3.162	$2.316 \cdot 10^4$	1.581	723.9

и менее опасные длинноволновые возмущения, которые при $z_i > 0.61$, которые определяют неустойчивость равновесия.

Характерный вид критического конечноволнового возмущения представлен на рис. 3.11.

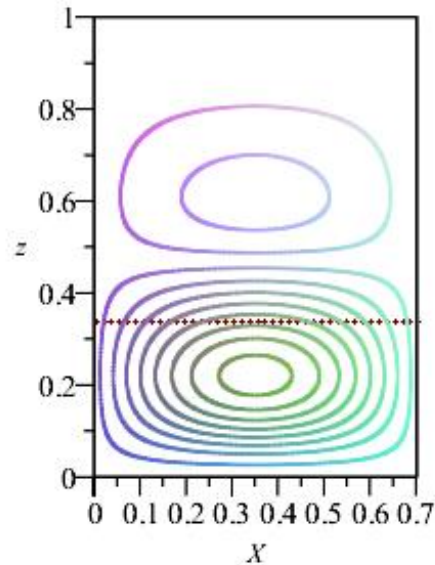


Рис. 3.11. Функция тока критического конечноволнового возмущения при $z_i = 0.333$. Пунктирной линией отмечена верхняя границы неустойчиво стратифицированной области слоя.

Видно, что критическое вихревое возмущение проникает глубоко в устойчиво стратифицированную область слоя.

На рис. 3.12 представлен профиль горизонтальной скорости через вертикальную плоскость, проходящую через центры вихрей критического возмущения при $z_i = 0.333$.

Рис.3.12 демонстрирует, что скорость критического возмущения максимальна в неустойчиво стратифицированном слое. Возмущение имеет трехвихревую структуру. Наиболее интенсивен вихрь, центр которого расположен при $z \approx 0.2$, а верхняя граница практически достигает половину слоя. Расположенный выше средний вихрь существенно менее интенсивен

Максимальная скорость в нем достигается на его нижней границе и ,как видно из рис. 3.12, примерно в два раза меньше максимальной скорости

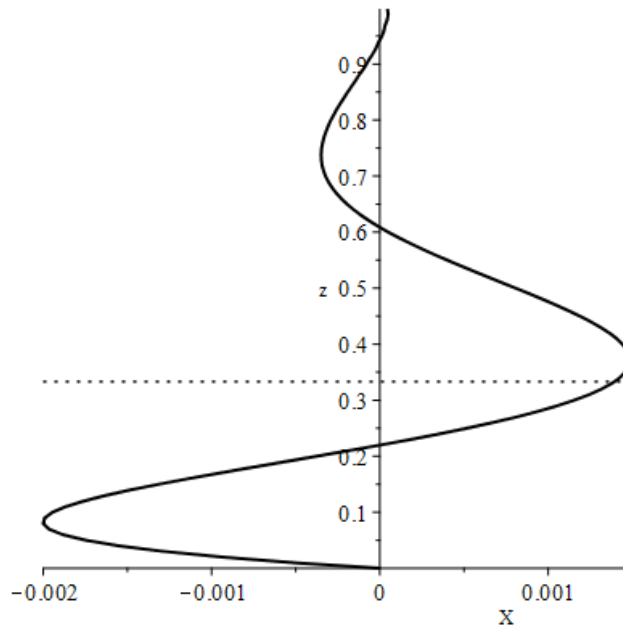


Рис. 3.12. Профиль скорости критического конечноволнового возмущения при $z_i = 0.333$. Пунктирной линией отмечена верхняя границы неустойчиво стратифицированной области слоя.

. в первом вихре. И, наконец, расположенный в верхней части слоя третий вихрь имеет еще меньшую интенсивность и на рис. 3.11 не разрешается. Скорость на его верхней границе практически равна нулю (см. рис.3.12).

3.5 Выводы

Тепловые условия, соответствующие фиксированному тепловому потоку, способствуют развитию длинноволновых возмущений, так что в случае линейной зависимости плотности от температуры эти возмущения являются наиболее опасными. Однако, как показало аналитическое и численное исследование, представленное в настоящей главе, в случае жидкости с инверсией плотности длинноволновые возмущения остаются наиболее опасными, если во всем слое жидкости имеется потенциально неустойчивая стратификация, или, по крайней мере, слой с устойчивой стратификацией достаточно тонок, а именно когда $z_i > 0.61$. Однако если слой с неустойчивой стратификацией тонок, то длинноволновые возмущения сильно стабилизируются и наиболее опасными становятся ячеистые возмущения.

Глава 4. Надкритические течения в прямоугольной полости с заданным тепловым потоком

Для оптимизации технологических процессов при наличии процессов тепломассопереноса в жидкости желательно разработать методы управления структурой движения подогреваемой снизу воды, как наиболее распространенной жидкости. Технический резервуар или естественный водоем может иметь свободную верхнюю границу, которая в широком интервале интенсивности подогрева может оставаться плоской и горизонтальной. При слабом равномерном подогреве снизу, когда число Релея Ra не превышает критическое значение Ra_c , жидкость может оставаться в покое. Увеличение интенсивности подогрева приводит при $Ra > Ra_c$ к конвекции Рэлея-Бенара, которая охватывает всю полость. Форма критического возмущения определяется граничными условиями для температуры. Так в случае бесконечного горизонтального слоя для изотермических границ наиболее опасное возмущение имеет форму ячеек с горизонтальным масштабом порядка толщины слоя, а в случае заданного теплового потока – наиболее опасно длинноволновое возмущение [18]. Бесконечность слоя является хорошим приближением вытянутой полости и позволяет определить порог возникновения конвекции. В приложениях слои имеют конечный горизонтальный размер, поэтому для исследования, возникающего в надкритической области нелинейного режима, важно изучить влияние конечной длины слоя, т.е. аспектного отношения. Анализ литературы показывает, что такие исследования проведены, в основном, для случая изотермических границ. Важный для приложений случай заданного теплового потока, остался вне внимания большинства исследователей.

В настоящей главе в параграфе 4.1 анализируется влияние конечности длины (аспектного отношения) прямоугольной горизонтальной полости на

возникновение неустойчивости и плоских надкритических режимов. Верхняя граница полости полагается свободной, а остальные – твердыми. На горизонтальных границах (твердой нижней и свободной верхней) задан постоянный тепловой поток, боковые стенки полагаются теплоизолированными. Полагается, что плотность жидкости линейно зависит от температуры. Для воды такие условия выполняются при температуре, близкой к комнатной, поэтому рассмотрен случай числа Прандтля $Pr = 7$.

Приведены результаты расчетов надкритических течений в интервале чисел Грасгофа до сорока надкритичностей $r = Ra/Ra_c$. Рассмотрены полости с отношениями длины к высоте от 1:1 до 5:1.

В параграфе 4.2 приводится постановка задачи о конвекции в горизонтальной полости для случая, когда плотность жидкости зависит от температуры по квадратичному закону (1.2). Для воды такие условия выполняются при температуре, близкой к 4°C , число Прандтля полагалось $Pr = 10$. Аспектное отношение принималось равным двум.

Изложение базируется на работах [135,137,138].

4.1 Конвекция в жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры

Рассмотрим прямоугольную горизонтальную полость высотой h и шириной l , находящуюся в однородном поле тяжести \mathbf{g} . Начало декартовой системы координат (x, z) расположим на нижней границе, ось z направим вертикально вверх. Полость заполнена вязкой несжимаемой жидкостью. Боковые и нижняя границы – твердые, а верхняя граница – свободная. На обеих горизонтальных границах $z = 0, h$ задан фиксированный вертикальный тепловой поток $q_z = q$, боковые границы $x = 0, l$ – полагаем теплоизолированными, т.е. тепловой поток q_x через них равен нулю.

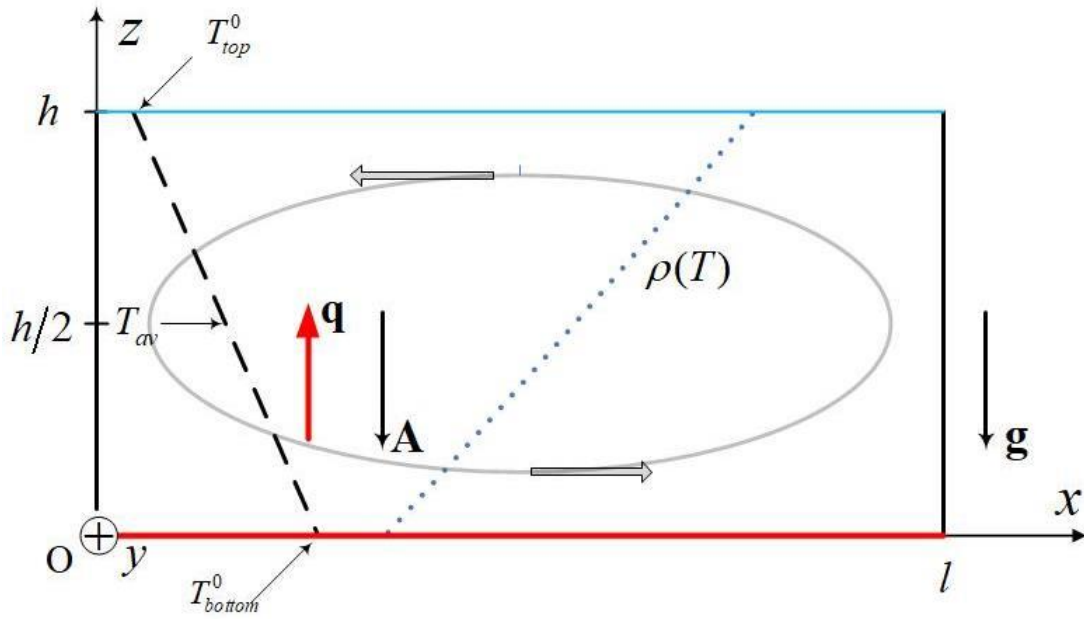


Рис. 4.1.. Геометрия задачи о возникновении конвекции воды в горизонтальной прямоугольной полости. Верхняя граница свободная и недеформируемая, нижняя твердая, а боковые – твердые и теплоизолированные.

Если жидкость покоится, то в соответствии с законом Фурье в полости устанавливается стационарное линейное по вертикали распределение температуры, которое может быть записано в виде:

$$T = T_0 + Ah - Az \quad (4.1)$$

где $A = -q/\kappa$ – величина заданного постоянного градиента температуры, порождаемого заданным вертикальным потоком тепла q , $A > 0$ соответствует подогреву снизу, далее он будет использоваться как задаваемый внешний параметр задачи. Введем в рассмотрение температуру T' , отсчитываемую от температуры поверхности жидкости T_0 в состоянии покоя, тогда соотношение (4.1) переписется в виде

$$T = Ah - Az \quad (4.2)$$

Здесь и далее штрих у температуры опущен.

Заданное в соответствии с (4.2) линейное распределение температуры при возникновении неустойчивости состояния механического равновесия и развития надкритического течения будет изменяться.

Количество тепла, поступающее в слой через нижнюю границу в единицу времени равно потоку тепла через верхнюю границу, вследствие чего средняя температура в слое не зависит от интенсивности конвекции и определяется только начальным распределением температуры:

$$T_{av} = \frac{Ah}{2} \quad (4.3)$$

Ограничимся рассмотрением плоских надкритических течений. Введем функцию тока ψ и завихренность φ :

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (4.4)$$

Уравнения свободной тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска с учетом (4.4) для переменных (ψ, φ, T) могут быть записаны в безразмерном виде [9]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Delta \varphi - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T, \quad (4.6)$$

$$\Delta \psi + \varphi = 0. \quad (4.7)$$

Введены следующие единицы измерения: времени – h^2/ν , расстояния – h , температуры – Ah , скорости – ν/h , функции тока – ν и завихренности – ν/h^2 . $\text{Pr} = \nu/\chi$ - число Прандтля. Безразмерный критерий подобия число Грасгофа Gr определяется через физические константы задачи соотношением:

$$\text{Gr} = \frac{g\beta Ah^4}{\nu^2} \quad (4.8)$$

Число Релея Ra , связано с числом Грасгофа Gr и числом Прандтля Pr соотношением:

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} = \frac{g\beta Ah^4}{\nu\chi} \quad (4.9)$$

Коэффициенты объемного расширения β , кинематической вязкости ν и температуропроводности χ полагаются постоянными.

Термокапиллярным эффектом, эффектами испарения и излучения на верхней свободной границе пренебрегаем. Нижняя граница считается твердой. Тогда граничные условия запишутся в виде:

$$\begin{aligned} z=0: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \\ z=1: \quad \psi = \varphi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Граничные условия на твердых и теплоизолированных боковых границах записываются в виде:

$$\begin{aligned} x=0: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ x=L: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь $L = l/h$ – аспектное отношение полости.

Задача (4.5)–(4.11) при любых значениях числа Грасгофа Gr , Прандтля Pr и аспектного отношения L имеет решение, соответствующее состоянию механического равновесия:

$$\psi^0 = \varphi^0 = 0, \quad T^0 = 1 - z. \quad (4.12)$$

Условие постоянства средней температуры (4.3) в безразмерной форме приобретает вид

$$T_{av} = 1/2. \quad (4.13)$$

Задача (4.5)–(4.11) решалась численно конечно-разностным методом, все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями на равномерной сетке. В большинстве расчетов шаг сетки полагался равным $h = 1/64$. Рассмотрены полости с аспектным отношением от $L=1$ до $L=5$. Была использована явная схема с постоянным шагом по времени $h^2/10$. Уравнение Пуассона (4.7) для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Значения завихренности на

твердых гранях (на нижней и двух боковых) получались с помощью формулы Тома [8,9]. На свободной верхней границе завихренность полагалась равной нулю.

Граничные условия для температуры на границах полости обеспечивают сохранение внутренней энергии жидкости, т.е. средней температуры в полости. Поэтому строго контролировалось сохранение средней температуры, т.е. выполнение в процессе расчета соотношения (4.13). Значения числа Прандтля полагались $Pr = 7$, что соответствует его значению для воды при комнатной температуре.

Влияние аспектного отношения на структуру конвекции. В настоящем параграфе описываются расчеты для $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$, $L = 4$ и $L = 5$. По результатам расчетов для каждого из приведенных значений аспектного отношения L определялось критическое число Грасгофа $Gr_{cr}(L)$ и исследовался нелинейный надкритический режим в области до нескольких десятков надкритичностей. Как следует из приведенного во введении обзора, исследования для конвекции в прямоугольных полостях со свободной верхней границей и заданным вертикальным тепловым потоком не практически проводились. Имеется лишь упоминавшаяся выше работа Спарроу, Голдстейна и Джонсона (Sparrow E. M., Goldstein R. J., Jonsson V. K. 1966) [18], в которой рассмотрен случай бесконечно вытянутого слоя, т.е. $L = \infty$. В бесконечном слое состояние покоя жидкости (4.12) становятся неустойчивым по отношению к малым нормальным возмущениям при превышении числом Рейля критического значения $Ra_{cr}(\infty) = 320$, определенного в [18] и подтвержденного в [134,136]. Отсюда следует, что критическое число Грасгофа для бесконечно вытянутой полости $L = \infty$ и рассматриваемого в настоящей работе значения числа Прандтля ($Pr = 7$), $Gr_{cr}(\infty) = 45,7$.

Рассмотрим влияние на устойчивость решения (4.12), соответствующего механическому равновесию, плавного увеличения числа

Грасгофа. Конечный горизонтальный размер полости, ввиду наличия твердых вертикальных стенок, тормозящих развитие возмущений, как правило [1], приводит к увеличению критических чисел возникновения конвективной неустойчивости.

Опишем более детально методику получения первого надкритического конвективного режима. В качестве начального состояния при всех рассмотренных значениях аспектного отношения L задавалось распределения функции тока, температуры и завихренности в виде:

$$\psi_{i,k}^0 = 0, T_{i,k}^0 = 1 - h \cdot k, \varphi_{i,k}^0 = \varphi^c \quad (4.14)$$

Здесь φ^c начальное возмущение завихренности во всех узлах сетки. Индекс k (i) по вертикальной (горизонтальной) координате z (x) принимает значения от 0 до N ($L \cdot N$). В представленных ниже расчетах $N = 64$, часть расчетов была проведена для $N = 128$.

Квадратная полость $L=1$. Рассмотрим сначала устойчивость механического равновесия и надкритические режимы конвекции при плавном увеличении числа Грасгофа в случае квадратной полости $L=1$. В этом случае расчеты с заданием в качестве начального состояния (4.14) были проведены для трех значений числа Грасгофа 100, 150 и 200. Отметим, что при задании начального состояния (4.14), на первом временном шаге по времени в полости формируется одновихревое движение, представленное на Рис.4.2, поэтому использование начального условия (4.14) эквивалентно заданию в момент времени $t = \Delta t$, т.е. на первом временном шаге, одновихревого движения, охватывающего всю полость.

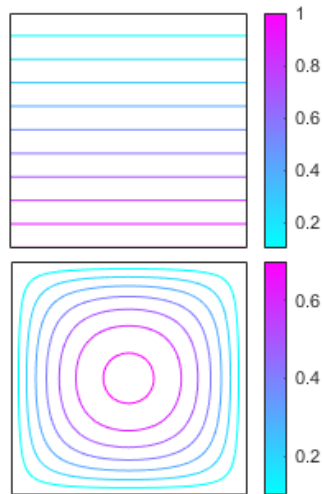


Рис. 4.2. Изотермы (вверху) и линии тока (внизу) начального возмущения при $L=1$ и $\varphi^c = 10$.

При $Gr = 200$ расчеты от начального состояния (4.14) с $\varphi_c = 10$ приводят к стационарному состоянию, представленному на Рис.4.3а.

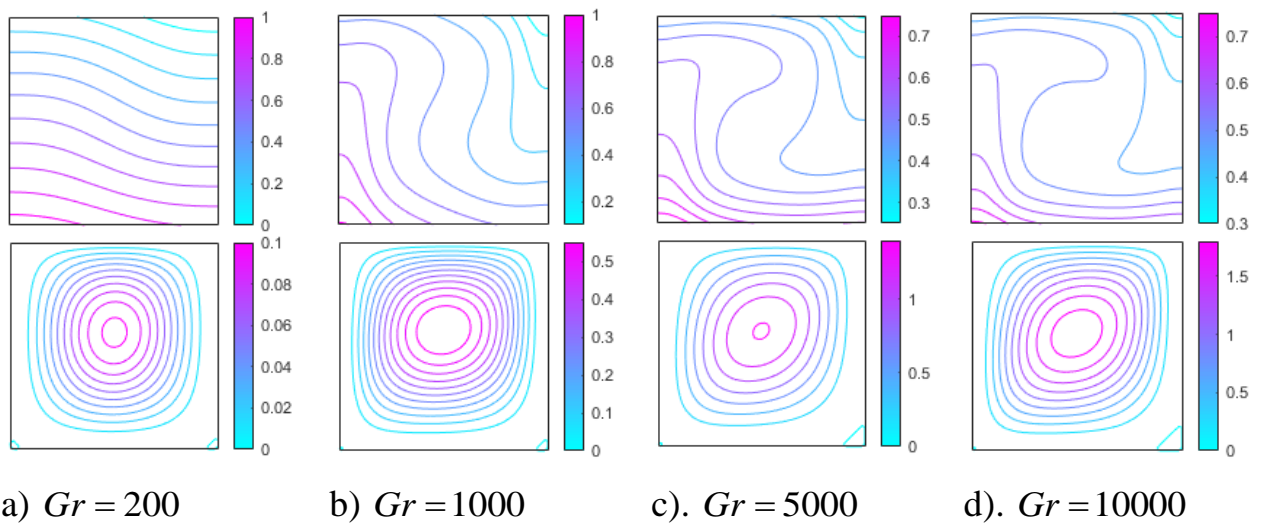


Рис. 4.3. Изотермы и линии тока надкритического конвективного течения в полости $L = 1$ для различных значений числа Грасгофа.

В последующих расчетах, для получения решения для других значений числа Грасгофа, применялся метод продолжения по параметру, т.е. в качестве начального состояния принималось полученное ранее для некоторого числа Грасгофа Gr_1 стационарное состояние, изменялось число Грасгофа на шаг ΔGr и путем численного решения задачи с этим состоянием, взятым в качестве начального, получалось новое стационарное

состояние для числа Грасгофа $Gr_2 = Gr_1 + \Delta Gr$. Использовались, как положительные, так и отрицательные шаги ΔGr . Абсолютная величина шага ΔGr варьировалась от $|\Delta Gr| = 10$ до $|\Delta Gr| = 500$. Расчеты показали, что такое пошаговое увеличение или уменьшение числа Грасгофа в интервале от $Gr = 180$ до $Gr = 10000$ не приводит к качественному изменению структуры надкритического течения, - оно остается одновихревым, см. Рис.4.3d, хотя интенсивность движения многократно увеличивается. Температурное поле изменяется так, что вдоль горизонтальных границ формируется градиент температуры, а градиент температуры в центре полости, уменьшаясь по величине, поворачивается по часовой стрелке более, чем на 90° .

Для количественной характеристики изменения интенсивности надкритических движений с ростом числа Грасгофа будем использовать зависимости от Gr среднего значения функции тока в полости $\psi_s(Gr)$ и удельной кинетической энергии конвективного движения $E(Gr)$, определенных соотношениями:

$$\psi_s(Gr) = \frac{1}{L} \int_0^1 \int_0^L \psi dz dx \quad (4.15)$$

$$E(Gr) = \frac{1}{2L} \int_0^1 \int_0^L v^2 dz dx = \frac{1}{2L} \int_0^1 \int_0^L \psi \phi dz dx \quad (4.16)$$

Полученные в расчетах зависимости $\psi_s(Gr)$ и $E(Gr)$ для интервала чисел Грасгофа $0 \leq Gr \leq 3000$ для течения, показанного на Рис.4.3 представлены на рис.4.4. В области чисел Грасгофа $180 \leq Gr \leq 1000$ кинетическая энергия стационарных решений зависит от числа Грасгофа линейно (зависимость получена методом наименьших квадратов):

$$E = 1.016 \cdot 10^{-3} \cdot (Gr - 177.2). \quad (4.17)$$

Экстраполируя зависимость (4.17) на ноль, получаем критическое значение числа Грасгофа $Gr_{cr}(1) = 177.2$. В области чисел Грасгофа $180 \leq Gr \leq 1000$ выполняется корневой закон для средней функции тока:

$$\psi_s = 3.432 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{Gr - 177.2} \quad (4.18)$$

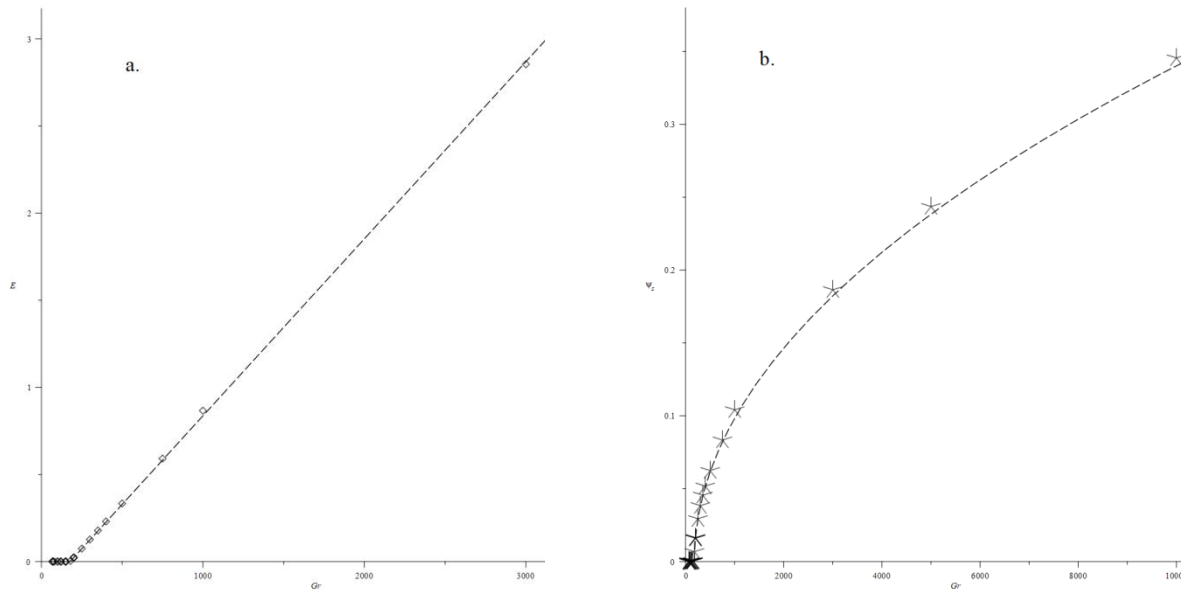


Рис. 4.4. Зависимости кинетической энергии (а) и средней функции тока (б) стационарного надкритического конвективного движения в полости $L=1$.

Зависимости (4.17) и (4.18) отображены штриховыми линиями на Рис. 4.4.

Прямоугольная полость $L=2$. Первая серия расчетов при $L=2$ была проведена для числа Грасгофа $Gr = 70$ в надежде, что оно превосходит, пока неизвестное, критическое число $Gr_{cr}(2)$ для $L=2$. В качестве начального состояния, как и в описанном выше случае $L=1$, задавалось распределение (4.14). Начальное значение завихренности φ^c во всех узлах сетки полагалось равным 10. Расчеты при меньших по модулю значениях φ^c , например, при $\varphi^c = 1$ приводили к затуханию возмущения и установлению равновесного состояния (4.12), соответствующего покою жидкости.

На рис. 4.4а приведено стационарное решение, полученное в результате численного расчета эволюции начального состояния (4.14) с $\varphi_c = 10$. В последующих расчетах, для получения решения для других значений числа Грасгофа, применялся метод продолжения по параметру. Расчеты показали, что пошаговое увеличение числа Грасгофа от $Gr = 70$ до $Gr = 3000$ не приводит к качественному изменению структуры надкритического течения, -

оно остается одновихревым, см. рис. 4.4, хотя интенсивность движения многократно увеличивается. Температурное поле изменяется так, что вдоль горизонтальных границ формируется горизонтальный градиент температуры, а градиент температуры в центре полости, уменьшаясь по величине, поворачивается по часовой стрелке более, чем на 90° .

Полученные в расчетах зависимости среднего значения функции тока в полости $\psi_s(Gr)$ и удельной кинетической энергии конвективного движения $E(Gr)$ для интервала чисел Грасгофа $0 \leq Gr \leq 3000$ для полости с аспектным отношением $L=2$ представлены на Рис. 4.6. В области чисел Грасгофа $70 \leq Gr \leq 1000$ кинетическая энергия стационарных решений зависит от числа Грасгофа линейно (зависимость получена методом наименьших квадратов):

$$E = 1.61 \cdot 10^{-3} \cdot (Gr - 60.7). \quad (4.19)$$

Экстраполируя зависимость (4.19) на ноль $E = 0$, получаем критическое значение числа Грасгофа $Gr_{cr}(2) = 60.7$. В области чисел Грасгофа $70 \leq Gr \leq 500$ выполняется корневой закон для средней функции тока:

$$\psi_s = 3.37 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{Gr - 60.7}. \quad (4.20)$$

Зависимости (4.19) и (4.20) отображены штриховыми линиями на рис.4.6.

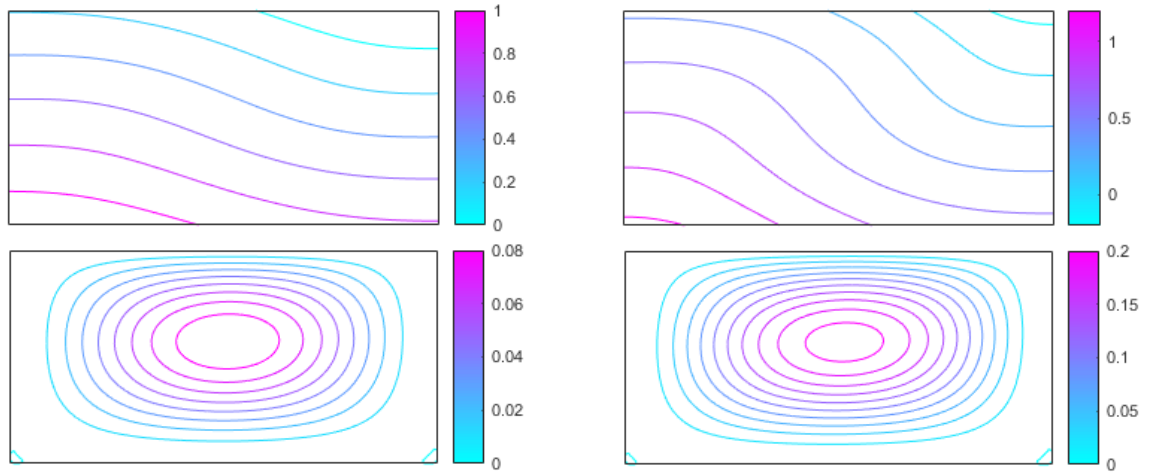
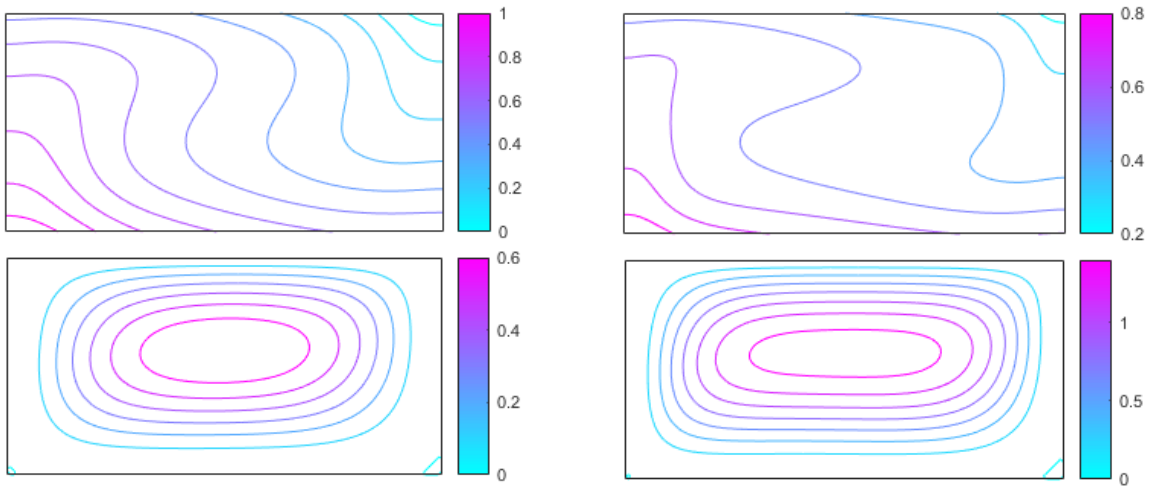
a) $Gr = 70$ b) $Gr = 100$ c) $Gr = 500$ d) $Gr = 3000$

Рис. 4.5. Изотермы и линии тока надкритического конвективного течения в полости $L = 2$ для различных значений числа Грасгофа.

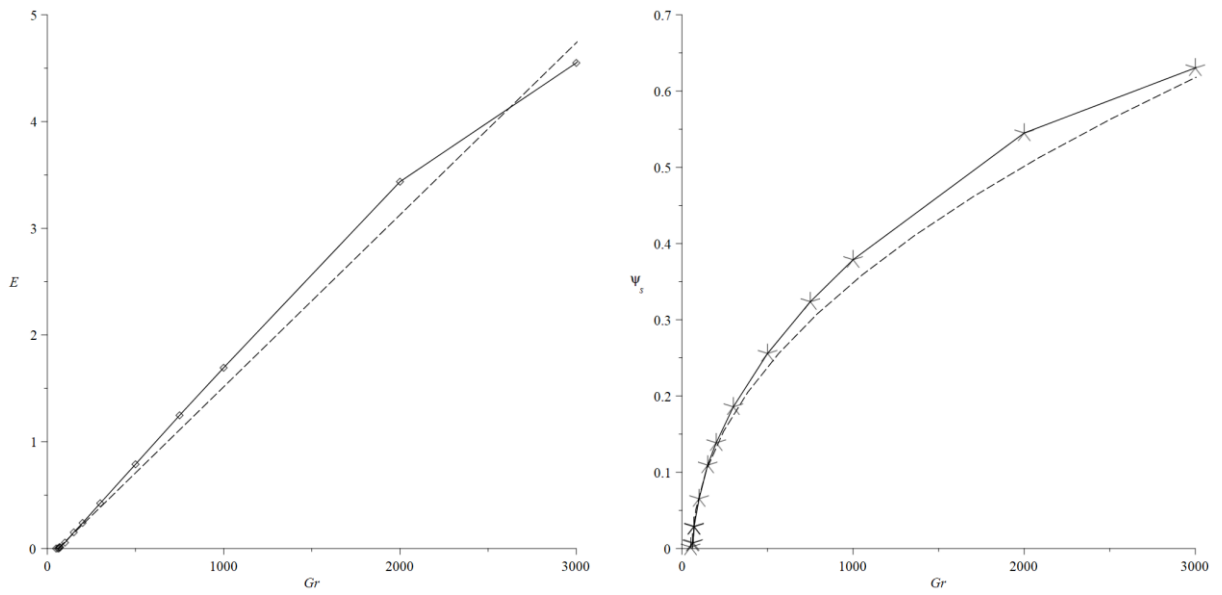


Рис. 4.6. Зависимости кинетической энергии (а) и средней функции тока (б) стационарного надкритического конвективного движения в полости $L = 2$.

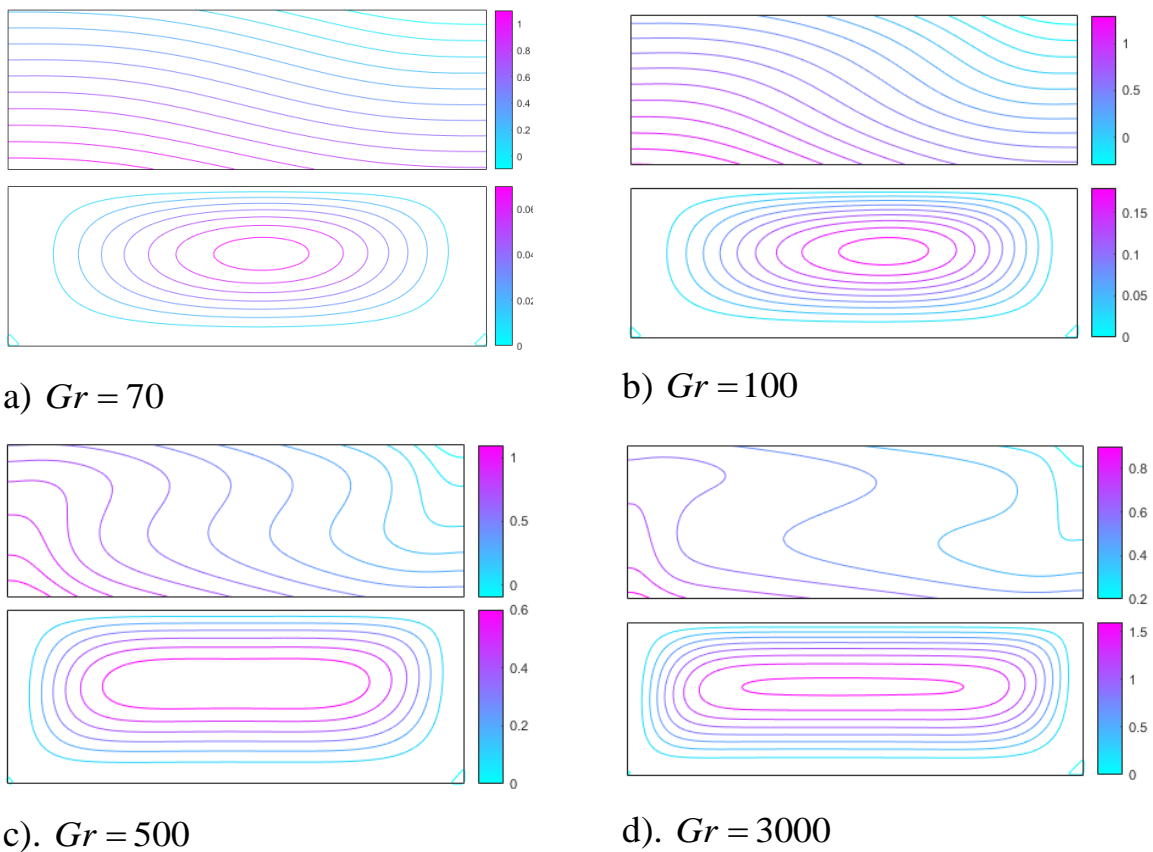


Рис. 4.7. Изотермы и линии тока надкритического конвективного течения в полости $L = 3$ для различных значений числа Грасгофа.

Прямоугольная полость $L=3$. На рис. 4.7а представлено стационарное решение, полученное в результате численного расчета эволюции начального состояния (4.14) с $\varphi_c=10$ для случая более вытянутой полости, чем рассмотренная выше. Расчеты показали, что увеличение вытянутости полости на 50% не приводит к качественному изменению влияния увеличения числа Грасгофа на структуру надкритического течения.

Полученные в расчетах зависимости $\psi_s(Gr)$ и $E(Gr)$ для интервала чисел Грасгофа $0 \leq Gr \leq 5000$ для движения, показанного на рис. 4.7 представлены на рис. 4.8. В области чисел Грасгофа $70 \leq Gr \leq 1000$ кинетическая энергия стационарных движений зависит от числа Грасгофа линейно:

$$E = 2.07 \cdot 10^{-3} \cdot (Gr - 61.1). \quad (4.21)$$

Экстраполируя линейно эту зависимость на ноль, получаем критическое значение числа Грасгофа $Gr_{cr}(3) = 61.1$. В области чисел Грасгофа $70 \leq Gr \leq 1000$ выполняется корневой закон для функции тока:

$$\psi_s = 1.43 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{Gr - 61.1}. \quad (4.22)$$

Зависимости (4.21) и (4.22) отображены штриховыми линиями на рис.4.8.

Прямоугольная полость $L=4$. На рис. 4.9 представлено стационарное решение, полученное в результате численного расчета эволюции начального состояния (4.14) с возмущением $\varphi_c=10$ для случая существенно вытянутой полости ($L=4$). Увеличение вытянутости полости в четыре раза не приводит к качественному изменению структуры течения, на всем рассмотренном интервале чисел Грасгофа оно остается одновихревым (см. рис. 4.9).

Полученные в расчетах зависимости $\psi_s(Gr)$ и $E(Gr)$ для интервала чисел Грасгофа $0 \leq Gr \leq 5000$ представлены на рис. 4.9. В области чисел Грасгофа $70 \leq Gr \leq 1000$ кинетическая энергия стационарного движения зависит от числа Грасгофа линейно:

$$E = 2.07 \cdot 10^{-3} \cdot (Gr - 61.1) \quad (4.23)$$

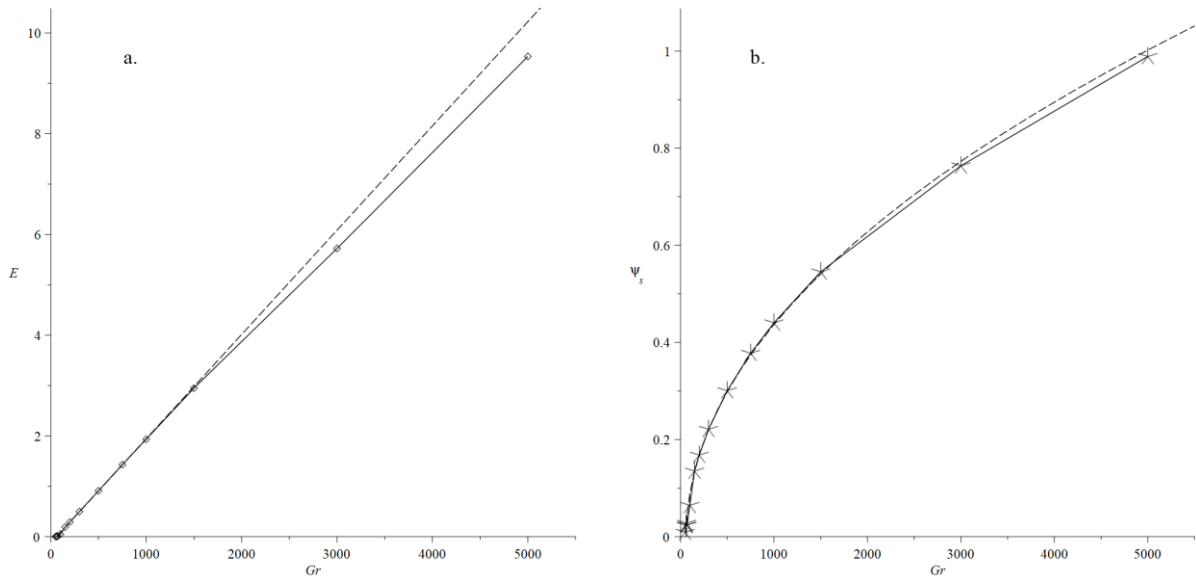


Рис. 4.8. Зависимости кинетической энергии (а) и средней функции тока (б) надкритического стационарного конвективного течения в полости $L = 3$.

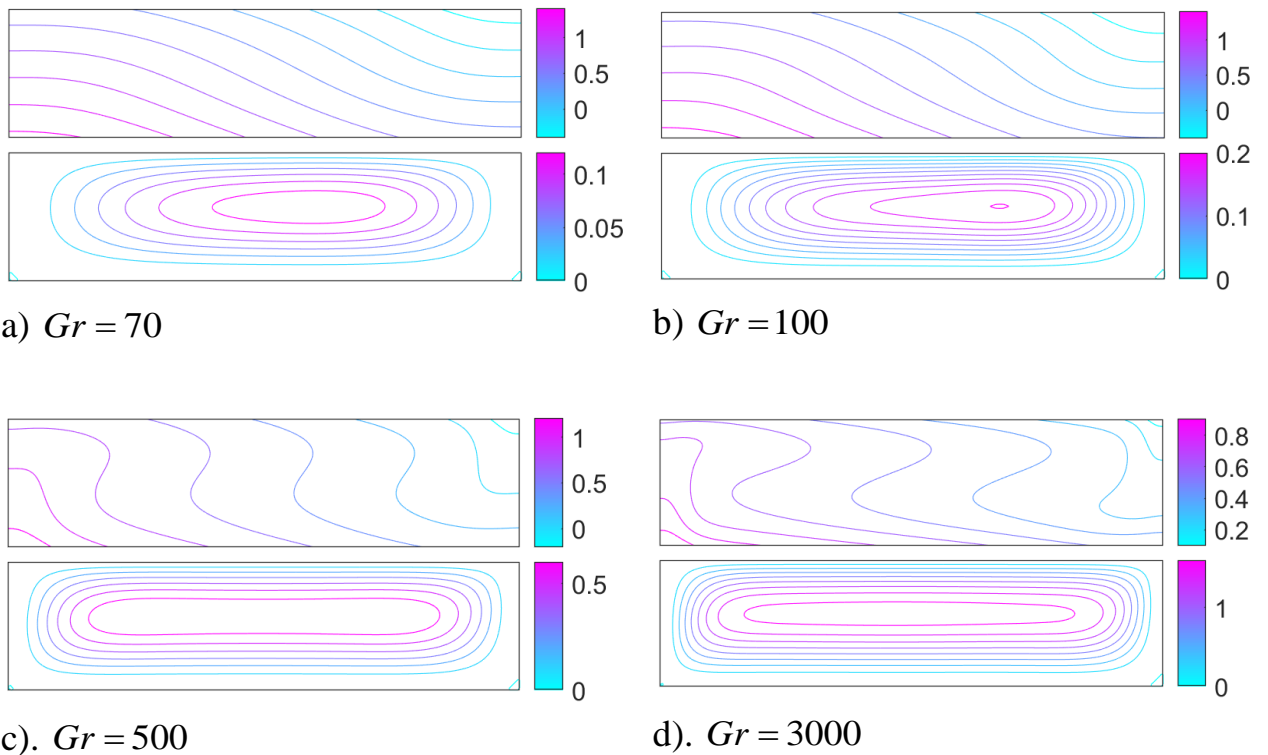


Рис. 4.9. Изотермы и линии тока надкритического конвективного течения в полости $L = 4$ для различных значений числа Грасгофа.

Экстраполируя эту зависимость на ноль, получаем критическое значение числа Грасгофа $Gr_{cr}(4) = 61.1$. В области чисел Грасгофа $70 \leq Gr \leq 1000$ выполняется корневой закон для функции тока:

$$\psi_s = 1.43 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{Gr - 61.1}. \quad (4.24)$$

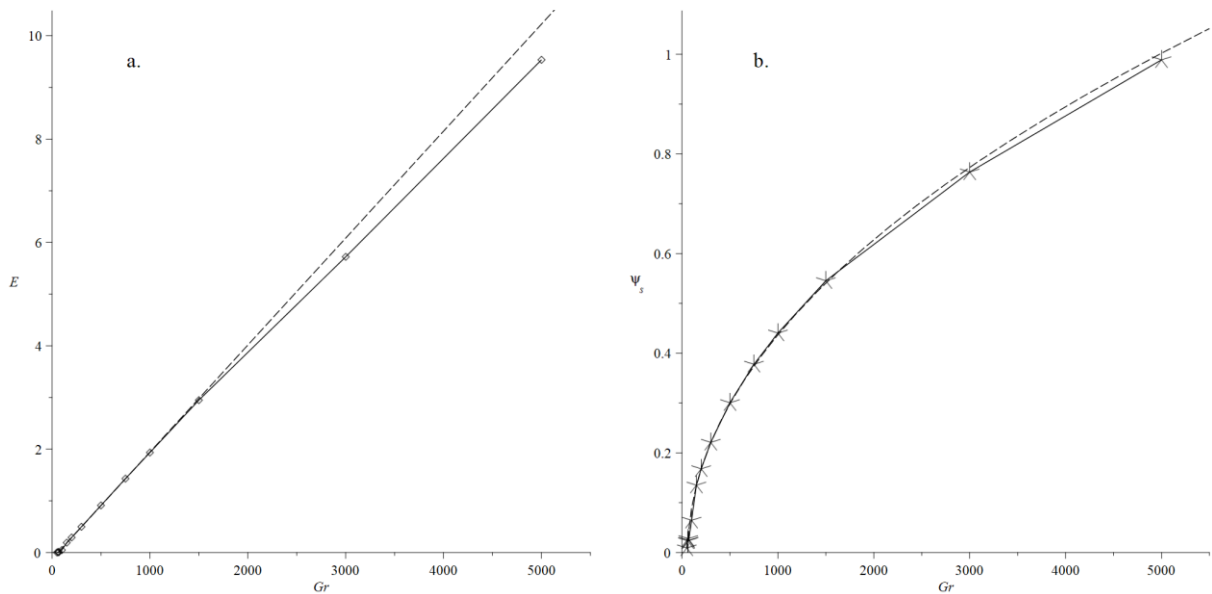


Рис. 4.10. Зависимости кинетической энергии (а) и средней функции тока (б) надкритического стационарного конвективного течения в полости $L = 4$.

Зависимости (4.23) и (4.24) отображены штриховыми линиями на рис. 4.10.

Прямоугольная полость $L = 5$. Дальнейшее увеличение горизонтального размера полости до $L = 5$ приводит к тому, что наряду с одновихревым течением, возникают ячеистые типы надкритических течений. Так численный расчет при $Gr = 70$ эволюции начального состояния (4.14) с $\varphi_c = 10$ приводит не к одновихревому течению, а к трехвихревому, показанному на рис. 4.11а. Размеры боковых вихрей равны между собой и они почти в два раза крупнее центрального, поэтому это течение будем называть трехвихревым течением типа long-short-long, сокращенно *lsl*. Увеличение числа Грасгофа приводит к росту одного из боковых вихрей и соответственному уменьшению размеров двух других (см. рис. 4.11с). При $Gr = 1500$ (рис. 4.11d) растущий вихрь уже более чем в три раза превосходит

каждый из двух оставшихся. Увеличение числа Грасгофа до $Gr = 1600$ приводит к умиранию этих коротких вихрей и к установлению после длительного переходного процесса одновихревого режима, аналогичного представленным на рис. 4.7 рис. 4.9.

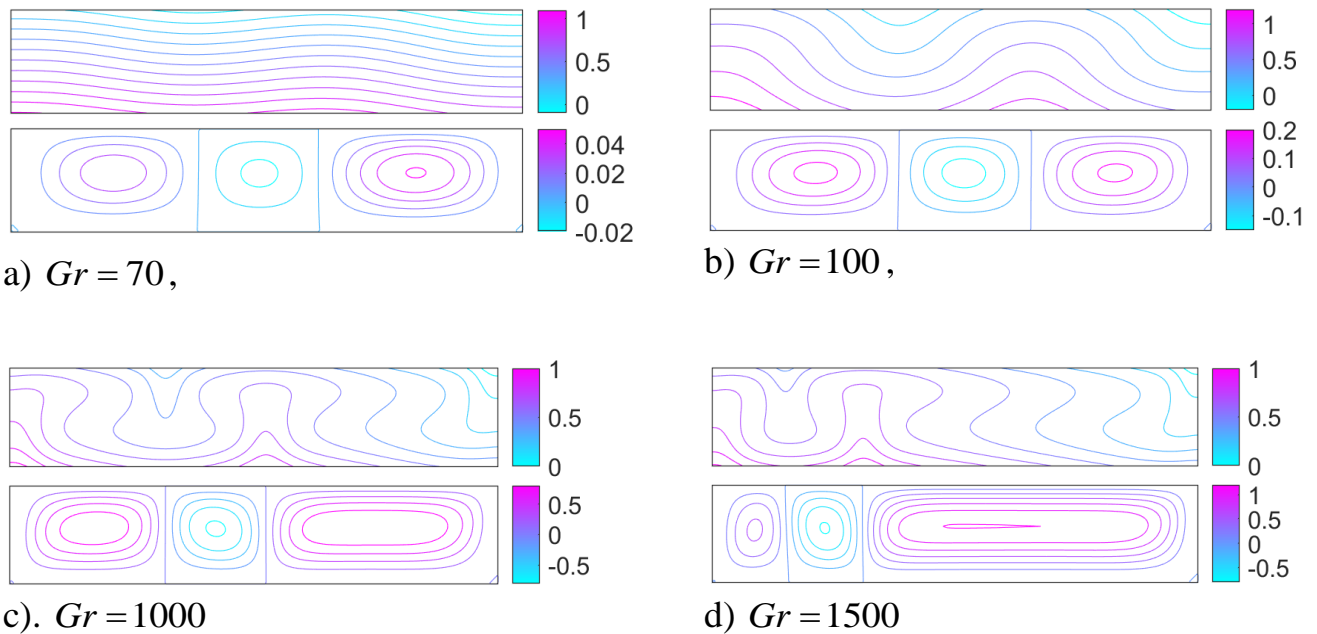


Рис. 4.11. Изотермы и линии тока надкритического трехвихревого конвективного течения типа lsl в полости с $L = 5$ для различных значений числа Грасгофа.

Результаты расчетов, в которых в качестве начального состояния было взято это одновихревое состояние, с последовательным уменьшением (увеличением) от $Gr = 1600$ числа Грасгофа до $Gr = 70$ ($Gr = 3000$) представлены на Рис. 4.12.

Полученная в расчетах зависимость кинетической энергии $E(Gr)$ одновихревого течения, показанного на Рис. 4.12 в области чисел Грасгофа $70 \leq Gr \leq 1000$ зависит от числа Грасгофа линейно:

$$E = 2.29 \cdot 10^{-3} \cdot (Gr - 54.8). \quad (4.25)$$

Экстраполируя линейно эту зависимость на ноль, получаем критическое значение числа Грасгофа $Gr_{cr}(5) = 54.8$. В этой же области чисел Грасгофа выполняется корневой закон для функции тока:

$$\psi_s = 1.59 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{Gr - 54.8}. \quad (4.26)$$

Плавное изменение числа Грасгофа в интервале $70 < Gr < 5000$ не приводит к бифуркациям одновихревого состояния. Если же в области небольших значений числа Грасгофа шаг его изменения между стационарными состояниями сделать достаточно большим, возникает трехвихревое движение с большим центральным вихрем и малыми боковыми (см. Рис. 4.13).

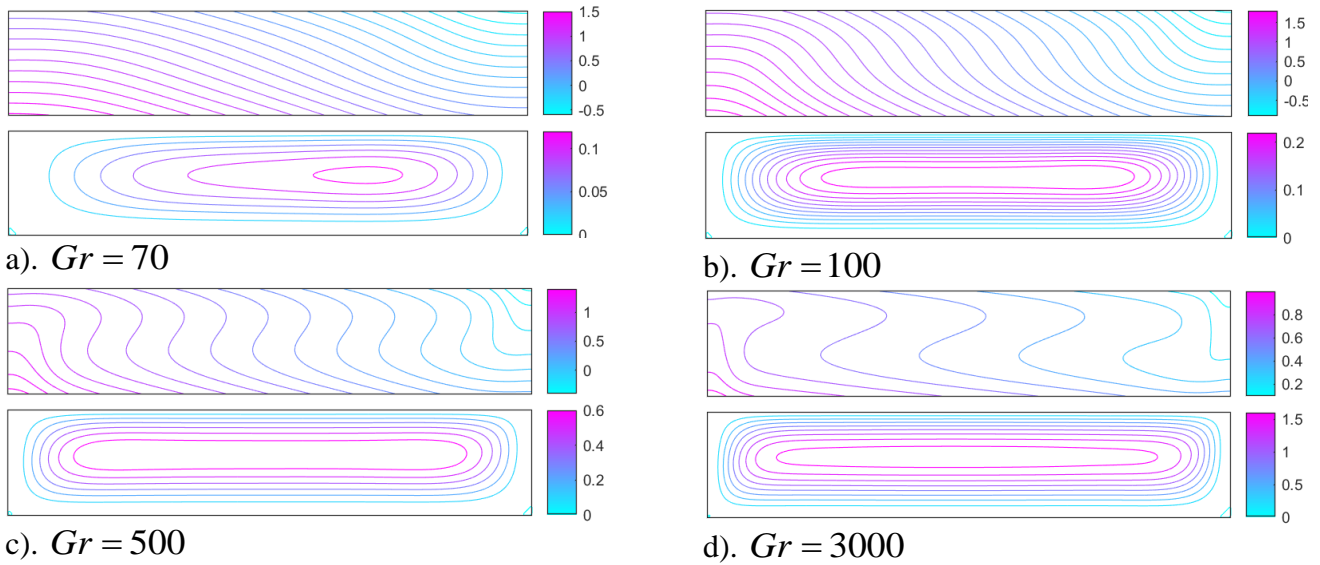


Рис. 4.12. Изотермы и линии тока надкритического одновихревого конвективного течения при $Gr = 70, 100, 500$ и 3000 в полости с $L = 5$.

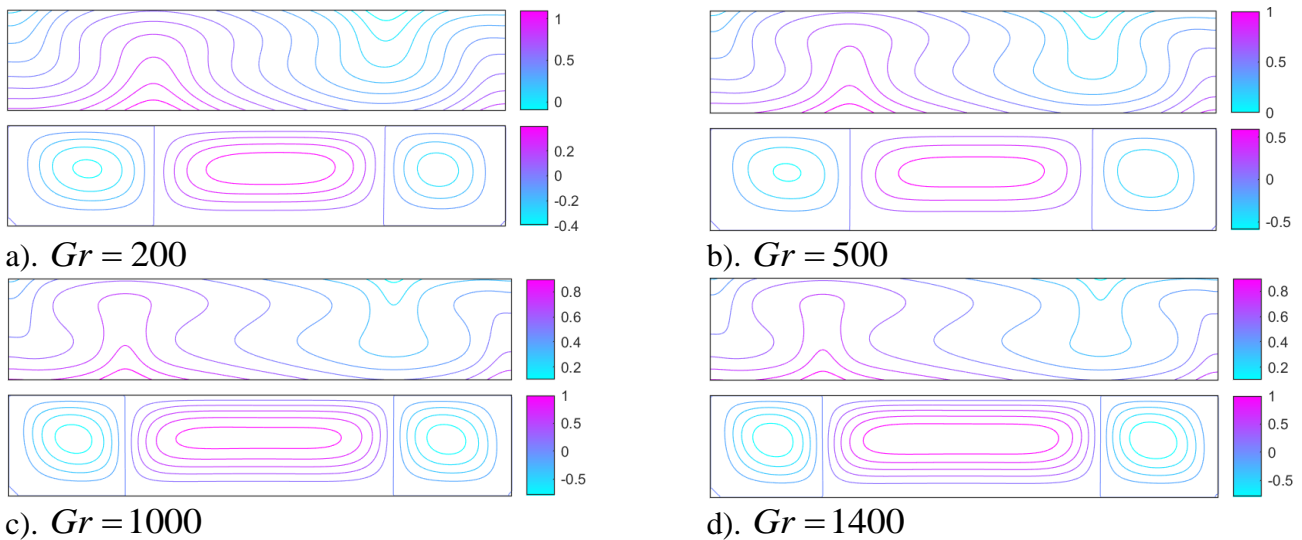


Рис. 4.13. Изотермы и линии тока надкритического трехвихревого конвективного течения типа sls при $Gr = 200, 500, 1000$ и 1400 в полости с $L = 5$.

Этот новый трехвихревой режим будем помечать sls (short-long-short). Его реализация, представленная на рис. 4.13а, получена в результате переходного процесса, в котором в качестве начального состояния было использовано стационарное одновихревое движение при $Gr = 100$, а приращение по числу

Грасгофа было задано равным $\Delta Gr = 100$. Как видно из остальных приведенных фрагментов рис. 4.13, увеличение числа Грасгофа приводит к увеличению длины центрального вихря, что мы расцениваем как проявление длинноволновой природы конвекции при заданном тепловом потоке на границах. Задание приращения $\Delta Gr = 100$ для последнего представленного на рис. 4.13d стационарного состояния ($Gr = 1400$) приводит к исчезновению одного из боковых вихрей и установлению в полости двухвихревого режима (ls), показанного на рис. 4.14c. Результаты расчетов, в которых в качестве начального состояния было взято это двухвихревое состояние, с последовательным уменьшением (увеличением) от $Gr = 1500$ числа Грасгофа до $Gr = 80$ ($Gr = 2700$) представлены на остальных фрагментах рис. 4.14.

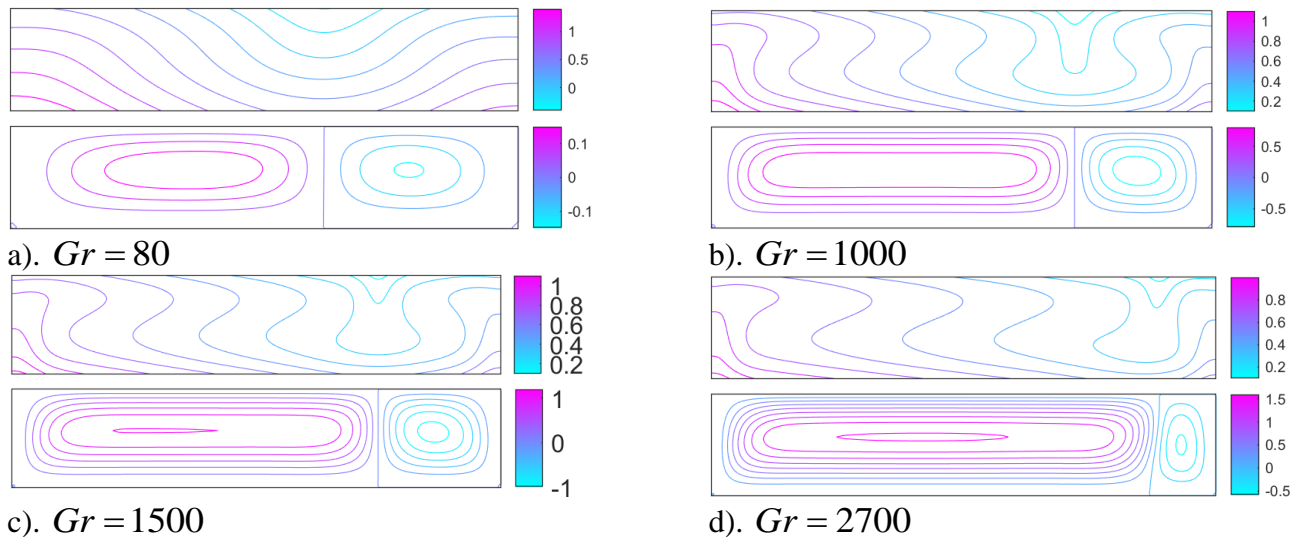


Рис. 4.14. Изотермы и линии тока надкритического двухвихревого конвективного течения типа ls при $Gr = 80, 1000, 1500$ и 2700 в полости с $L = 5$.

Сводная диаграмма возникающих в полости течений и бифуркаций между ними представлена на Рис. 4.15. Стрелками отмечены описанные выше бифуркации.

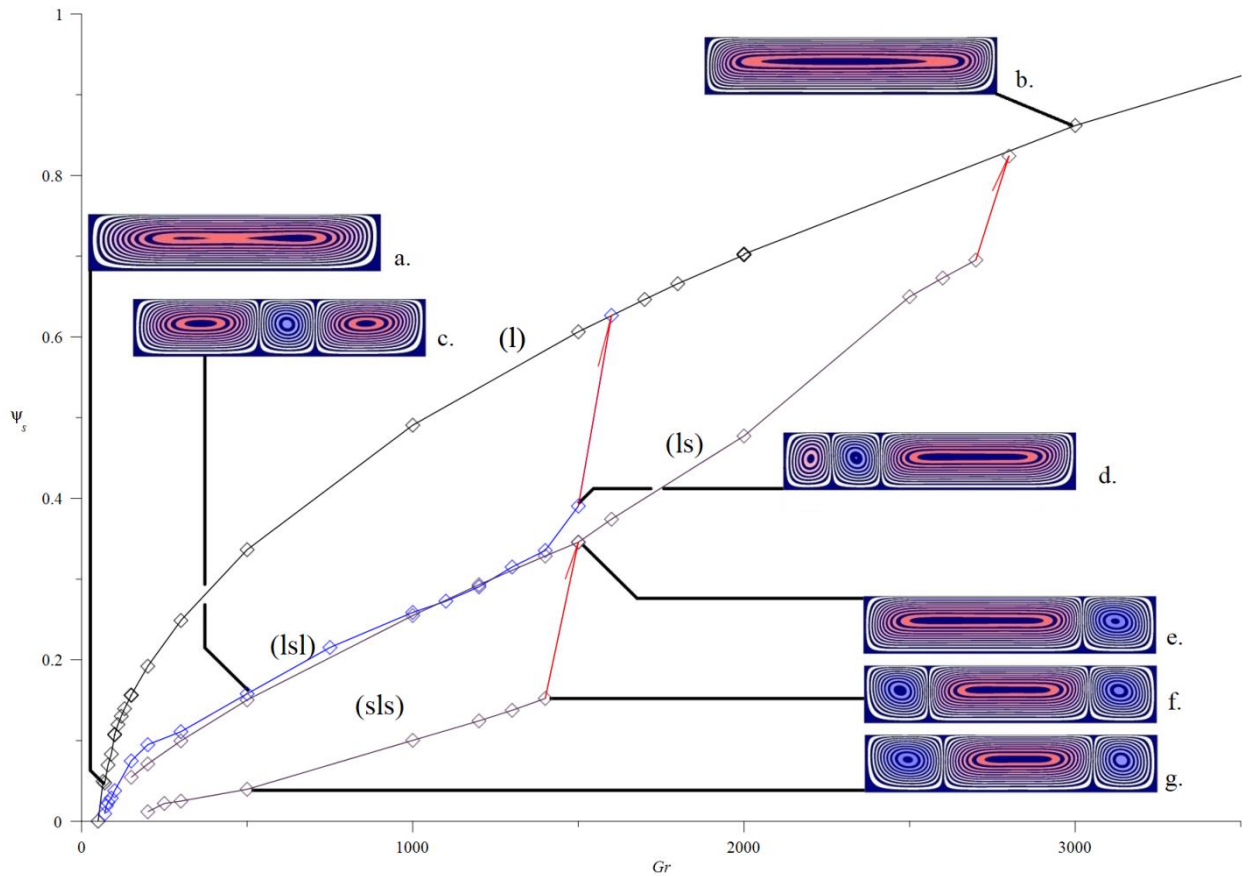


Рис. 4.15. Зависимости функции тока ψ_s четырех типов надкритических стационарных конвективных течений в полости с $L = 5$.

Выводы по параграфу. Полученные в расчетах одновихревые течения являются проявлением длинноволновой неустойчивости, поскольку их можно трактовать как результат нелинейного развития самого протяженного в горизонтальном направлении возмущения. Из линий тока, представленных на рис. 4.9с и 4.9d, видно, что в вытянутой полости развитие этого аналога длинноволнового возмущения приводит к формированию в центральной части полости плоскопараллельного адвективного течения, на верхней и нижней границах которого сформировался постоянный горизонтальный градиент температуры. Недавно было установлено, что такое плоскопараллельное течение в бесконечном слое, т.е. при $L = \infty$, для случая обеих твердых границ может терять устойчивость по отношению к плоским ячейистым возмущениям [117,118]. Поэтому можно ожидать, что при достаточно большом значении L в рассматриваемой задаче тоже может возникнуть ячейистое течение.

Расчеты, проведенные конечно-разностным методом для значений числа Релея, превышающих критическое до пятидесяти раз, показали, что в указанном интервале чисел Релея в умеренно вытянутых полостях, с соотношением сторон до 4:1, в надкритической области реализуется одновихревое стационарное состояние. В полости с соотношением сторон 5:1 для широкого интервала чисел Грасгофа возможна множественность стационарных состояний, от одновихревого до трехвихревого. Обнаружены и исследованы гистерезисные переходы между ними, возникающие при плавном и скачкообразном изменении числа Грасгофа.

4.2 Проникающая конвекция в жидкости с инверсией плотности

Результаты наших исследований, представленных в предыдущем параграфе показывают, что в случае, когда вытянутые полости заполнены жидкостью с линейной зависимостью плотности от температуры и заданным на границах вертикальным тепловым потоком, характерная длинноволновая природа неустойчивости ярко проявляется уже в полостях с $L=4$, $L=3$ и даже в умеренно вытянутой полости с $L=2$. В таких полостях надкритическое движение в широком интервале надкритичностей имеет вид одного крупномасштабного вытянутого вихря. При увеличении L критическое число Релея уменьшается и приближается к значению, определенному методами линейной теории устойчивости для бесконечного слоя. В значительно вытянутой полости $L=5$ только одно надкритическое движение является крупномасштабным. Таким образом, длинноволновая природа неустойчивости в жидкости без тепловой инверсии плотности проявляется уже в умеренно вытянутой полости с аспектным отношением $L=2$.

Этот анализ позволяет предположить, что длинноволновая природа неустойчивости в талой воде, т.е. в жидкости с инверсией плотности, будет проявляться в умеренно вытянутой полости с аспектным отношением $L=2$.

Поэтому целью настоящего параграфа является исследование конечно-разностным методом устойчивости механического равновесия и надкритических режимов конвекции жидкости с тепловой инверсией плотности в горизонтальной полости с аспектным отношением $L=2$ для двух характерных значений положения точки инверсии $z_i=0.5$ и $z_i=0.75$. Выбор значений z_i связан с тем, что при первом значении в бесконечном слое природа неустойчивости ячеистая, а при втором – длинноволновая.

Таким образом в настоящем параграфе исследуется влияние интенсивности подогрева, выражаемой числом Грасгофа, на структуру надкритических режимов тепловой конвекции воды в горизонтальной прямоугольной полости с аспектным отношением равным двум. На боковых твердых границах выполняются условия теплоизолированности, а на нижней твердой и верхней свободной горизонтальной и недеформируемой гранях задан постоянный вертикальный поток тепла. В условиях, когда средняя по полости температура близка к температуре инверсии плотности воды 4°C в полости возможно состояние механического равновесия, когда поверх неустойчиво стратифицированного слоя расположен устойчиво стратифицированный. Для двух случаев положения горизонтальной границы между этими слоями исследована структура стационарной плоской надкритической тепловой конвекции. Расчеты проведены конечно-разностным методом на квадратной сетке с 128 узлами по горизонтальной координате и 64 – по вертикальной. Число Прандтля полагалось равным $Pr=10$, что близко к его значению для воды при 4°C .

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим горизонтальную

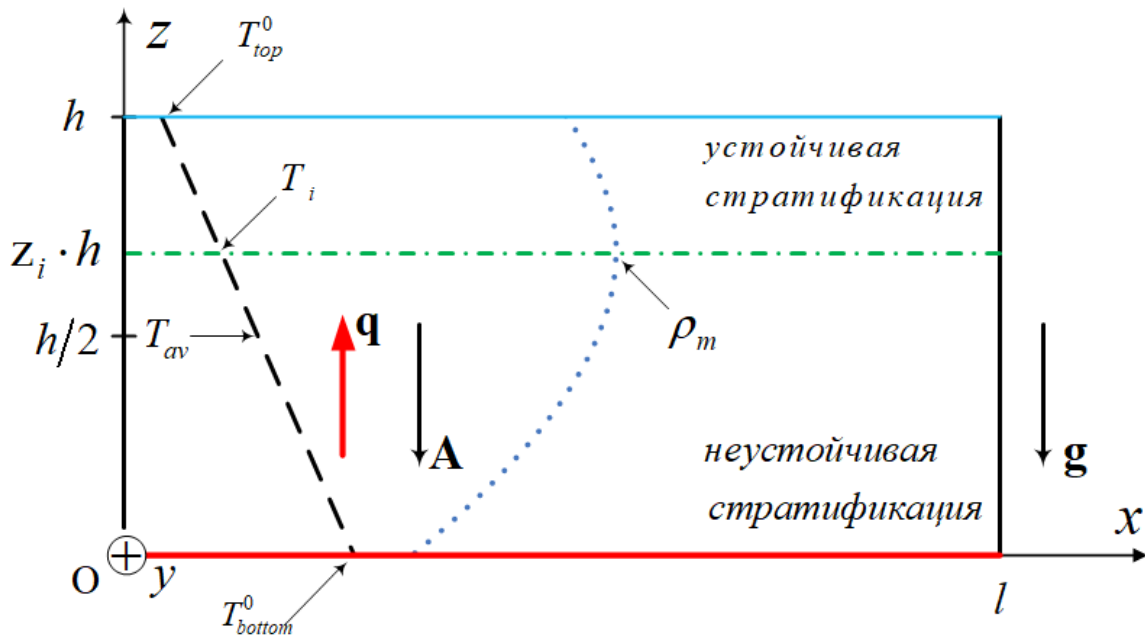


Рис. 4.16. Геометрия задачи. Верхняя граница свободная и недеформируемая, нижняя твердая, а боковые – твердые и теплоизолированные. Равновесное распределение температуры $T^0(z)$ показано пунктирной линией, а распределение плотности в состоянии механического равновесия $\rho^0(z)$ – точечной. .

прямоугольную полость высотой h и шириной l (рис. 4.16), заполненную водой и находящуюся в однородном поле тяжести \mathbf{g} . На обеих горизонтальных границах $z=0, h$ задан фиксированный вертикальный тепловой поток \mathbf{q} , боковые границы $x=0, l$ - теплоизолированные. Зависимость плотности от температуры принимается квадратичной в соответствии с (1.2).

Прямоугольная правая декартова система координат (x, y, z) определена так, что ось x проходит по более нагретой горизонтальной, а ось z - по левой теплоизолированной - вертикальной. Верхняя граница полагается свободной, а все остальные – твердыми.

Для описания движения жидкости применим уравнения свободной тепловой конвекции жидкости с температурной инверсией плотности в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - \alpha_2 \mathbf{g} (T - T_i)^2, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad (4.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4.29)$$

Здесь p -добавка к гидростатическому распределению давления в неподвижной жидкости. Коэффициенты кинематической вязкости ν и температуропроводности χ полагаются постоянными. Термокапиллярным эффектом, эффектами испарения и излучения на верхней свободной границе пренебрегается. Оценки В.Б. Бекежановой [38,39] показывают, что для условий открытых водоемов (прудов, озер) приближение Буссинеска может быть использовано для глубин порядка сотни метров.

Граничные условия на теплоизолированных вертикальных стенках запишутся в виде:

$$x = 0, l: \mathbf{v} = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (4.30)$$

На твердой нижней и свободной верхней горизонтальных гранях граничные условия запишутся в виде

$$z = 0: \mathbf{v} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = -A, \quad (4.31)$$

$$z = h: v_z = 0, \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = -A. \quad (4.32)$$

Из содержащихся в (4.30)-(4.32) граничных условий для температуры, означающих, что на горизонтальных границах полости задан постоянный вертикальный градиент температуры, а боковые стенки теплоизолированные, следует, что количество теплоты, поступающее в полость через нижнюю границу в единицу времени равно потоку тепла через верхнюю границу.

Следовательно средняя температура жидкости T_{av} в слое не зависит от интенсивности конвекции и определяется только начальным распределением температуры в жидкости.

Задача (4.27)-(4.32) имеет решение, соответствующее состоянию механического равновесия:

$$\mathbf{v}^0=0, \quad (4.33)$$

$$T^0 = -Az + T_{av} + \frac{Ah}{2}, \quad (4.34)$$

$$p^0 = -\frac{1}{3}\alpha_2 g \rho_m A^3 h^3 \left(\frac{T_{av} + Ah/2 - T_i}{Ah} - \frac{z}{h} \right)^3 + \text{const} . \quad (4.35)$$

Из (4.34) следует, что в состоянии механического равновесия температура на горизонтальных границах постоянна и определяется выражениями:

$$T_{bottom}^0 = T_{av} + \frac{Ah}{2}, \quad (4.36)$$

$$T_{top}^0 = T_{av} - \frac{Ah}{2}. \quad (4.37)$$

Введем обозначение

$$z_i = \frac{T_{bottom}^0 - T_i}{T_{bottom}^0 - T_{top}^0} \quad (4.38)$$

Подставляя сюда выражения (4.36), (4.37) получаем

$$z_i = \frac{T_{av} + Ah/2 - T_i}{Ah} \quad (4.39)$$

Отсюда видно, что z_i является безразмерным параметром и в зависимости от соотношения средней температуры жидкости и температуры инверсии может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Используя (4.39) выражение (4.34) для равновесного распределения температуры переписывается в виде

$$T^0 = T_i + Ah \left(z_i - \frac{z}{h} \right) \quad (4.40)$$

Подставив (4.40) в (1.2) получим распределение плотности в состоянии механического равновесия:

$$\rho^0 = \rho_m \left(1 - \alpha_2 A^2 h^2 \left(\frac{z}{h} - z_i \right)^2 \right). \quad (4.41)$$

Продифференцировав это соотношение по z получаем:

$$\frac{d\rho^0}{dz} = 2\rho_m \alpha_2 A^2 h \left(\frac{z}{h} - z_i \right). \quad (4.42)$$

Из этой формулы, если $z_i \leq 0$ то во всем слое $d\rho^0/dz < 0$, т.е. в покоящейся жидкости реализуется устойчивая стратификация. При $0 < z_i < 1$, устойчиво стратифицирована лишь верхняя часть слоя $z_i h < z < h$, а прилегающий к дну полости слой $0 < z < z_i h$ стратифицирован неустойчиво (рис.4.16). Из (4.36) следует, так же, что при $z_i \geq 1$ весь слой жидкости стратифицирован неустойчиво. z_i имеет ясный физический смысл безразмерной толщины неустойчиво стратифицированного слоя и указывает на границу между устойчиво и неустойчиво стратифицированными слоями, т.е. является безразмерной координатой точки инверсии плотности (см. (4.34)).

Средняя температура T_{av} связана с z_i соотношением:

$$T_{av} - T_i = Ah \left(z_i - \frac{1}{2} \right). \quad (4.43)$$

Отсюда видно, что z_i указывающее на положение точки инверсии в равновесном распределении температуры в жидкости связано простым соотношением с положительно определенной средней температурой жидкости, являющейся параметром задачи. Поэтому z_i также является параметром задачи, принимающим как положительные, так и отрицательные значения.

Введем в рассмотрение векторные потенциалы:

$$\Phi = \text{rot} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \text{rot} \Psi \quad (4.44)$$

Будем полагать, что надкритическое течение плоское, – равна нулю y компонента скорости и все переменные не зависят от y координаты. Поэтому y векторных потенциалов Φ и Ψ отличными от нуля будут только y -компоненты, имеющие в плоском случае смысл завихренности и функции тока:

$$\Phi = (0, \varphi, 0), \quad \Psi = (0, \psi, 0). \quad (4.45)$$

Введем также в рассмотрение отклонение температуры от температуры инверсии

$$T = T - T_i. \quad (4.46)$$

Тогда применив операцию rot к (4.27) и используя (4.44) – (4.45) можно получить систему уравнений тепловой конвекции для переменных (ψ, φ, T) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Delta \varphi - \text{Gr} T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T, \quad (4.48)$$

$$\Delta \psi + \varphi = 0. \quad (4.49)$$

Знак тильда у T здесь и далее опущен.

Уравнения (4.47) – (4.49) записаны в безразмерном виде. Для этого введены следующие единицы измерения: времени – h^2/ν , расстояния – h , температуры – Ah , скорости – ν/h , функции тока – ν и завихренности – ν/h^2 . $\text{Pr} = \nu/\chi$ – число Прандтля. Безразмерный критерий подобия Gr является аналогом числа Грасгофа и определяется через физические константы задачи соотношением:

$$\text{Gr} = \frac{2g\alpha_2 A^2 h^5}{\nu^2} \quad (4.50)$$

Введем в рассмотрение аналог числа Релея Ra , связанный с Gr и Pr соотношением:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{2g\alpha_2 A^2 h^5}{\nu\chi} \quad (4.51)$$

Компоненты скорости связаны с функцией тока соотношениями:

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (4.52)$$

Условия на твердой нижней и свободной верхней горизонтальных границах принимают вид:

$$\begin{aligned} z=0: \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \\ z=1: \quad \psi = \varphi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Граничные условия на твердых боковых границах в новых переменных в безразмерной форме принимают вид:

$$\begin{aligned} x=0: \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ x=L: \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Здесь $L = l/h$ – аспектное отношение.

Состояние механического равновесия, когда жидкость покоится, в новых переменных и безразмерной форме запишется в виде:

$$\psi^0 = \varphi^0 = 0, \quad T^0 = z_i - z \quad (4.55)$$

Выражение (4.43), связывающее среднюю температуру жидкости с координатой точки инверсии в покое, в безразмерных переменных переписывается в виде:

$$T_{av} = z_i - \frac{1}{2} \quad (4.56)$$

Таким образом, решение задачи (4.47) – (4.54) определяется числом Прандтля Pr , числом Грасгофа Gr , координатой точки инверсии z_i (или средней температурой жидкости в полости T_{ov}) и аспектным отношением L .

Задача (4.47) – (4.54) решалась численно конечно-разностным методом, все пространственные производные аппроксимировались центральными

разностями на равномерной сетке. Шаг сетки полагался равным $h = 1/64$. Аспектное отношение в представленных ниже расчетах полагалось равным двум ($L = 2$). Была использована явная схема с постоянным шагом по времени $h^2/10$. Уравнение Пуассона (4.49) для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Граничное условие для завихренности на нижней и боковых твердых стенках получалось по формулам Тома [9].

Результаты расчетов. Основные расчеты проведены для полости с аспектным отношением $L = 2$ для двух значений положения точки инверсии $z_i = 0,5$ (равная толщина устойчиво и неустойчиво стратифицированных подслоев) и $0,75$ (тонкий устойчиво стратифицированный слой располагается над в три раза более толстым неустойчиво стратифицированным слоем). Число Прандтля полагалось равным $Pr = 10$. По результатам расчетов, для каждого из приведенных значений z_i , определялось критическое число Грасгофа и исследовался нелинейный надкритический режим.

Равные толщины устойчиво и неустойчиво стратифицированных подслоев: $z_i = 0,5$. В этом случае в состоянии механического равновесия нижняя половина слоя жидкости $0 \leq z \leq 0,5$ неустойчиво стратифицирована. Поверх него расположен равный ему по толщине устойчиво стратифицированный слой жидкости. Для случая бесконечной протяженности полости в горизонтальном направлении ($L = \infty$), состояние покоя жидкости становятся неустойчивым по отношению к малым нормальным возмущениям при превышении числом Релея критического значения $Ra_c(\infty; 0,5) = 2,32 \cdot 10^4$ (см. Табл. 3.1 в главе 3). Отсюда следует, что критическое число Грасгофа для бесконечно вытянутой полости и значения числа Прандтля $Pr = 10$ равно $Gr_c(\infty; 0,5) = Ra_c(\infty; 0,5)/Pr = 2,32 \cdot 10^3$.

Рассмотрим влияние плавного увеличения числа Грасгофа на устойчивость механического равновесия. Конечный горизонтальный размер

полости, ввиду наличия твердых вертикальных стенок, тормозящих развитие возмущений, как правило, приводит к увеличению критических чисел возникновения конвективной неустойчивости [1]. Поэтому первая серия расчетов была проведена для числа Грасгофа $Gr = 3000$ в надежде, что оно превосходит, пока неизвестное, критическое число $Gr_{cr}(2;0,5)$ для аспектного отношения $L = 2$. В качестве начального состояния задавались следующие распределения полей функции тока, температуры и завихренности:

$$\psi_{i,k}^0 = 0, T_{i,k}^0 = 0.5 - h \cdot k, \varphi_{i,k}^0 = \varphi^c \quad (4.57)$$

Начальное значение завихренности φ^c во всех узлах сетки полагалось равным 10. Расчеты при меньших по модулю значениях φ^c , например, при $\varphi^c = 1$ приводили к затуханию возмущения (4.57) и установлению равновесного состояния покоя.

На рис.4.17а приведено стационарное надкритическое решение, полученное в результате численного расчета эволюции начального состояния (4.57) с $\varphi_c = 10$. Вихревая структура надкритического течения соответствует результатам линейной теорией полученными в главе 3 для бесконечного слоя, т.е. имеет двурусный вид по вертикали, с проникновением интенсивных вихрей из нижнего неустойчиво стратифицированного яруса в верхний – устойчиво стратифицированный. Нелинейность приводит к искривлению границы между ярусами, – она приобретает волнообразный вид. Схожая структура надкритических течений наблюдалась для случая изотермических границ в [69], а также в [119,120] при исследовании конвекции парогазовой смеси, имеющей, как и талая вода, аномальную зависимость плотности от температуры.

В последующих расчетах, для получения решения для других значений числа Грасгофа, применялся метод продолжения по параметру, т.е. в качестве начального состояния принималось полученное ранее для некоторого числа Грасгофа Gr_1 стационарное состояние, одномоментно

изменялось число Грасгофа на шаг ΔGr и путем численного решения задачи с этим состоянием, получалось новое стационарное состояние для числа Грасгофа $Gr_2 = Gr_1 + \Delta Gr$. Величина шага по числу Грасгофа ΔGr варьировалась от $\Delta Gr = 10$ до $\Delta Gr = 500$. Расчеты показали, что такое пошаговое увеличение числа Грасгофа от $Gr = 3000$ до $Gr = 14500$ приводит к плавному изменению структуры надкритического течения. Центры интенсивных вихрей нижнего, неустойчиво стратифицированного, яруса сдвигаются к твердым стенкам и в нижней части каждой из ячеек происходит отрыв вихрей от нижней стенки, приводящий к формированию в каждой ячейке слабого, встречного к основному, вихря (рис.4.17б). Общее количество крупных вихрей становится равным шести. Наблюдается строгое разделение вертикальной плоской границей на две равные квадратные ячейки.

Дальнейшее увеличение числа Грасгофа приводит к бифуркации, заключающейся в удвоении числа ячеек по горизонтальной координате. Такое стационарное состояние, полученное из представленного на рис.4.17б ($Gr = 14500$) путем увеличения числа Грасгофа на $\Delta Gr = 200$, приводит к формированию стационарной вихревой структуры (режим II), представленной на рис.4.17в. Интенсивность конвективного течения в прилегающих к твердым вертикальным стенкам ячейках заметно слабее. Дальнейшее увеличение числа Грасгофа приводит к выравниванию интенсивностей соседних вихрей, как в нижнем, так и в верхнем ярусе (см. рис.4.17г), на котором представлено стационарное состояние для $Gr = 20000$. При уменьшении числа Грасгофа, при $Gr = 13000$, происходит переход к прежнему режиму I с двумя квадратными ячейками. Переход от режима I к II и обратно происходит гистерезисным образом.

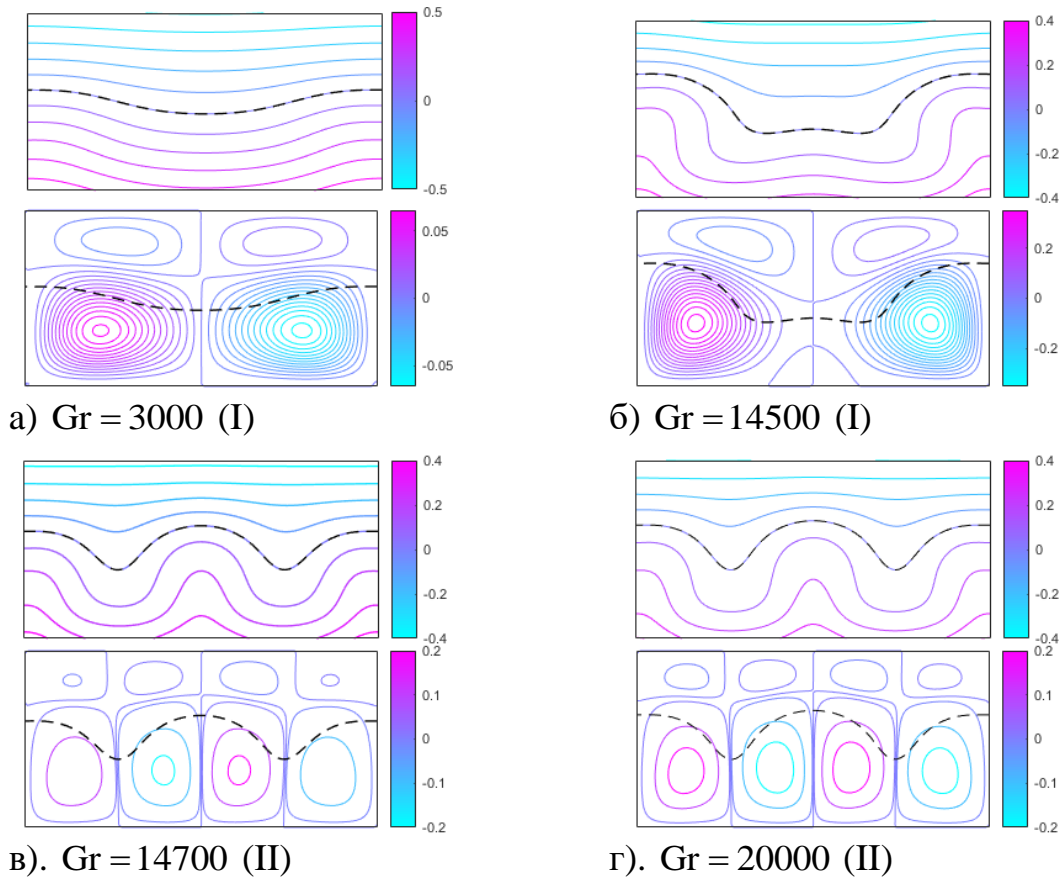


Рис. 4.17 Изотермы и линии тока режимов I и II надкритического конвективного течения при $z_i = 0,5$ для различных значений числа Грасгофа.

Для количественной характеристики изменения интенсивности надкритических движений с ростом числа Грасгофа будем использовать зависимости от Gr максимального по модулю значения функции тока в полости $\psi_m(\text{Gr})$ и удельной кинетической энергии конвективного движения $E(\text{Gr})$, определенной выражением:

$$E(\text{Gr}) = \frac{1}{2L} \int_0^1 \int_0^L v^2 dz dx = \frac{1}{2L} \int_0^1 \int_0^L \psi \phi dz dx \quad (4.58)$$

Полученные в расчетах зависимости $\psi_m(\text{Gr})$ и $E(\text{Gr})$ для интервала чисел Грасгофа $0 \leq \text{Gr} \leq 20000$ представлены на рис.4.18. В области чисел Грасгофа $3000 \leq \text{Gr} \leq 10000$ кинетическая энергия стационарных решений зависит от числа Грасгофа линейно (зависимость получена методом наименьших квадратов):

$$E = 2,66 \cdot 10^{-5} \cdot (Gr - 2,56 \cdot 10^3) \quad (4.59)$$

Экстраполируя эту зависимость на ноль, получаем критическое значение числа Грасгофа $Gr_{cr}(2;0,5) = 2,56 \cdot 10^3$. В этой же области чисел Грасгофа $3000 \leq Gr \leq 10000$ выполняется корневой закон для максимального по модулю значения функции тока:

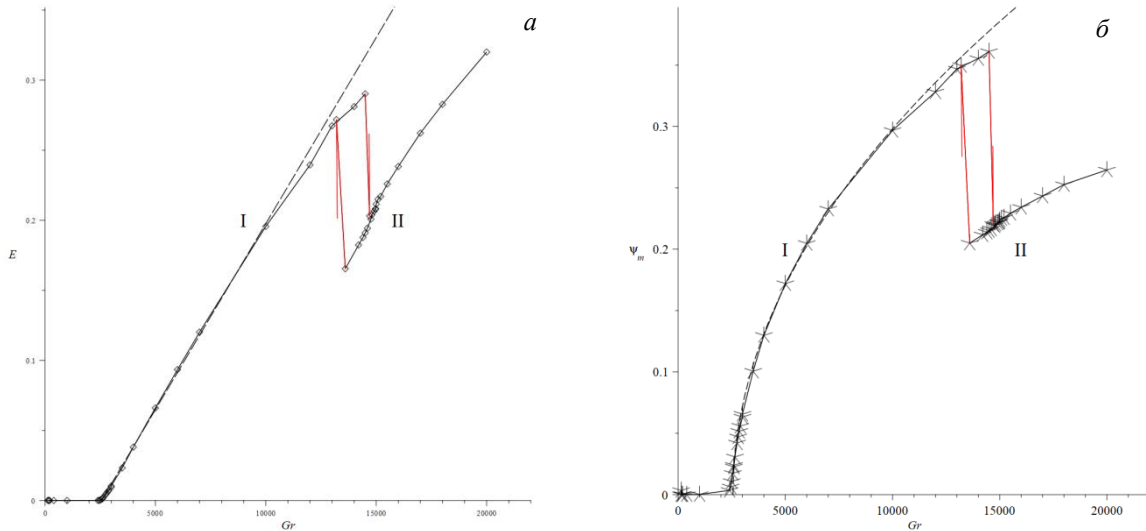


Рис.4.18. Зависимости кинетической энергии (а) и максимальной функции тока (б) режимов I и II стационарного надкритического конвективного движения в полости для $z_i = 0,5$.

$$\psi_m = 3,46 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{Gr - 2,56 \cdot 10^3} \quad (4.60)$$

Зависимости (28) и (29) отображены штриховыми линиями на рис.4.18.

Проверочный расчет на конечно-разностной сетке из квадратных ячеек с шагом $1/128$ для значения числа Грасгофа $Gr = 20000$ показал, что картина течения до деталей соответствует представленной на рис.4.17г, а значение кинетической энергии отличается от полученного на сетке с шагом $1/64$ менее чем на $0,07\%$.

Тонкий устойчиво стратифицированный слой поверх толстого неустойчиво стратифицированного слоя: $z_i = 0,75$. В этом случае, когда в полости реализуется состояние механического равновесия, нижние три четверти слоя жидкости ($0 \leq z \leq 0,75$) неустойчиво стратифицированы, и поверх него расположен в три раза более тонкий устойчиво

стратифицированный подслой. Для случая бесконечной протяженности полости в горизонтальном направлении ($L = \infty$), состояние покоя жидкости при $z_i > 0,61$ становится неустойчивым по отношению к длинноволновым возмущениям при превышении числом Релея критического значения, определяемого полученной нами формулой (3.60):

$$\text{Ra}_c(\infty; z_i) = \frac{320}{z_i - \frac{5}{9}} \quad (4.61)$$

Из этой формулы следует, что критическое число Грасгофа для бесконечно вытянутой полости и рассматриваемого в настоящей работе значения числа Прандтля $\text{Pr} = 10$: $\text{Gr}_c(\infty; 0,75) = 165$. Как правило, конечность слоя приводит к увеличению критического числа Грасгофа. Поэтому первая серия расчетов была проведена для числа Грасгофа $\text{Gr} = 300$ в надежде, что оно превосходит, пока неизвестное, критическое число $\text{Gr}_{cr}(2; 0,75)$. Как и в рассмотренном выше случае $z_i = 0,5$ в качестве начального состояния задавались распределения (4.57) с регулируемым начальным возмущением φ^c . На Рис.4.19а представлено стационарное решение, полученное в результате численного расчета эволюции начального состояния (4.57) для указанного числа Грасгофа с начальным возмущением $\varphi^c = 10$. Расчеты при существенно меньших по модулю значениях φ^c , например, при $\varphi^c = 1$ приводили к затуханию возмущенного состояния (4.57). Как видно из рисунка надкритическое течение является одновихревым и заполняет всю полость, что говорит о длинноволновой природе неустойчивости.

Расчеты, показали, что пошаговое увеличение числа Грасгофа от $\text{Gr} = 300$ до $\text{Gr} = 20000$ не приводит к качественному изменению структуры надкритического течения. Оно остается крупномасштабным одновихревым, что подтверждает его длинноволновую природу (см. рис 4а-г). Его несимметричность обусловлена началом формирования восходящего конвективного пограничного слоя около левой вертикальной стенки. Это

приводит к смещению центра вихря. Наблюдается сходство с рис.1.2, соответствующем надкритичности в две сотых для случая, когда обе горизонтальные границы твердые, а на вертикальных задано условие периодичности.

Полученные в расчетах зависимости $\psi_m(\text{Gr})$ и $E(\text{Gr})$ для интервала чисел Грасгофа $0 \leq \text{Gr} \leq 10000$ представлены на рис.4.20.

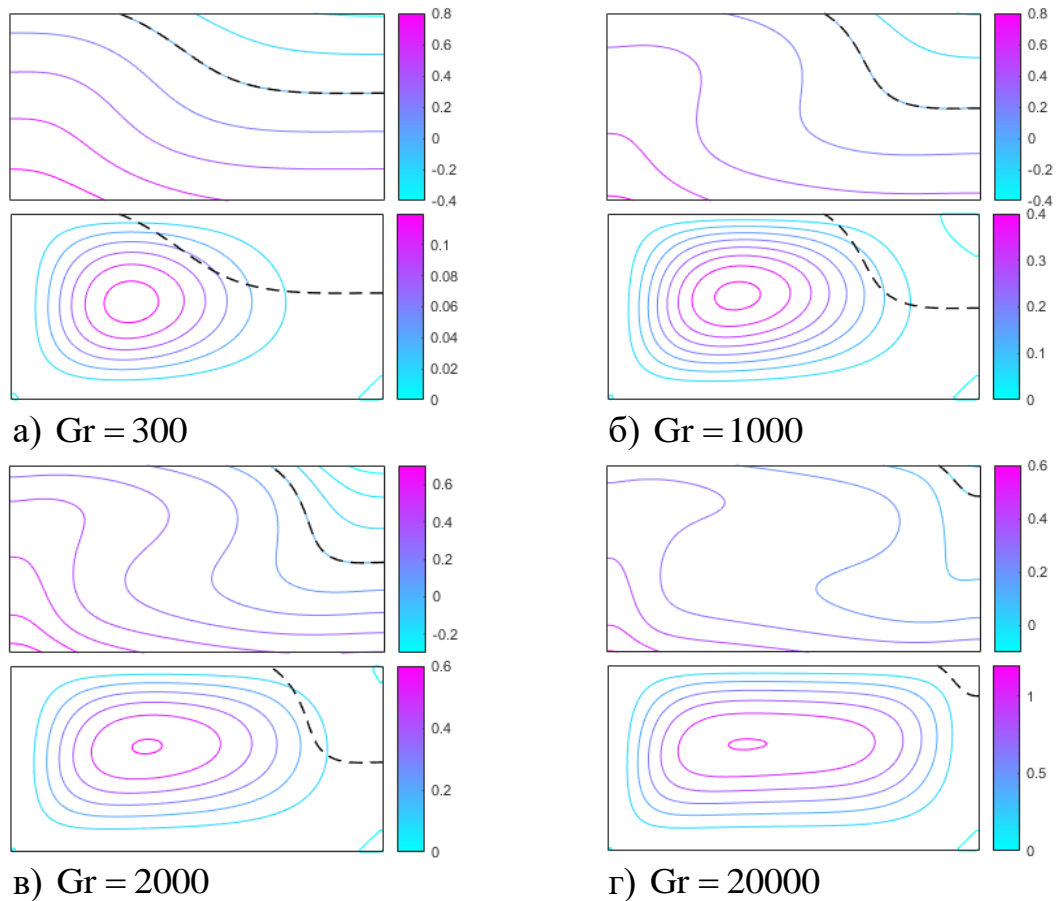


Рис. 4.19. Изотермы и линии тока надкритического конвективного течения при $z_i = 0,75$ для различных значений числа Грасгофа.

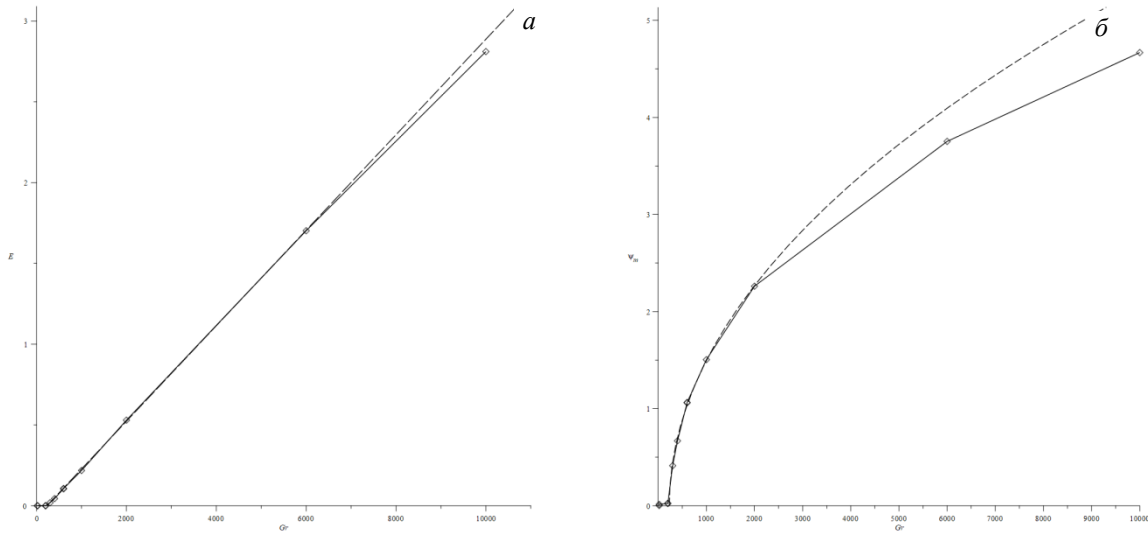


Рис.4.20. Зависимости кинетической энергии (а) и максимальной функции тока (б) стационарного надкритического конвективного движения в полости для $z_i = 0.75$.

В области чисел Грасгофа $300 \leq Gr \leq 2500$ кинетическая энергия стационарных решений зависит от числа Грасгофа линейно (зависимость получена методом наименьших квадратов):

$$E = 2,96 \cdot 10^{-4} \cdot (Gr - 2,30 \cdot 10^2) \quad (4.62)$$

Экстраполируя зависимость (4.62) на ноль, получаем критическое значение числа Грасгофа $Gr_{cr}(2; 0,75) = 2,30 \cdot 10^2$. Это значение благодаря конечности полости на 39% превышает критическое число для бесконечного слоя $Gr_{cr}(\infty; 0,75) = 165$, определяемое формулой (4.61). В этой же области чисел Грасгофа выполняется корневой закон для максимальной по модулю функции тока:

$$\psi_m = 1,46 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{Gr - 2,30 \cdot 10^2} \quad (4.63)$$

Проверочный расчет на конечно-разностной сетке из квадратных ячеек с шагом $1/128$ для значения числа Грасгофа $Gr = 20000$ показал, что картина течения до деталей соответствует представленной на рис.4.19г, а значение кинетической энергии отличается от полученного на сетке с шагом $1/64$ менее чем на 0,04%.

Выводы по параграфу. Расчеты показали, что в умеренно вытянутой горизонтальной полости с аспектным отношением $L = 2$ для случая $z_i = 0,5$ когда толщина неустойчиво стратифицированного слоя равна толщине устойчиво стратифицированного слоя, надкритическое течение имеет по горизонтальной координате двухячеистую структуру. Вертикальная структура ячеек имеет сложный двухярусный характер изменяющийся с увеличением интенсивности подогрева. В области примерно шестикратной надкритичности двухячеистое надкритическое течение гистерезисным образом гистерезисным образом переходит в четырехячеистое течение.

Для случая $z_i = 0,75$, когда толщина устойчиво стратифицированного слоя $1 - z_i$ в три раза меньше толщины неустойчиво стратифицированного z_i , – надкритическое конвективное течение имеет вид вытянутой по горизонтали одновихревой ячейки. С увеличением числа Грасгофа до, примерно, стократной надкритичности оно остается одновихревым и не испытывает бифуркаций.

С увеличением интенсивности теплопередачи через слой в центральной области полости вблизи поверхности и дна (см. Рис.4.19г) формируется выраженное плоскопараллельное течение. Поэтому в дальнейших исследованиях необходимо рассмотреть устойчивость этого плоскопараллельного течения по отношению к плоским ячеистым возмущениям.

Расчеты показали, что при числах Грасгофа, превышающих 20000 на 10-20 процентов, возникают колебательные режимы конвекции, для рассмотрения и классификации которых планируется проведение дополнительных исследований. Планируется также учесть термокапиллярный эффект на свободной границе, который может привести к возникновению нового механизма ячеистой неустойчивости.

4.3 Выводы

Вычисления показали, что при равной толщине неустойчиво и устойчиво стратифицированных слоев, надкритическая конвекция в области примерно до шести надкритичностей имеет в горизонтальном направлении двух ячеистую структуру с двумя (большим снизу и более слабым сверху) вихрями, в каждой из ячеек. Эта двух ячеистая структура при увеличении надкритичности гистерезисным образом переходит в четырех ячеистую. Для случая, когда толщина устойчиво стратифицированного слоя в три раза меньше толщины неустойчиво стратифицированного, - надкритическое конвективное течение имеет вид вытянутой по горизонтали одновихревой ячейки. С увеличением числа Грасгофа до, примерно, стократной надкритичности оно остается одновихревым и не испытывает бифуркаций.

Тепловые условия, соответствующие фиксированному тепловому потоку, способствуют развитию длинноволновых возмущений, так что в случае линейной зависимости плотности от температуры эти возмущения являются наиболее опасными. Однако, как показало аналитическое и численное исследование, представленное в настоящей главе, в случае жидкости с инверсией плотности это не всегда так. Длинноволновые возмущения остаются наиболее опасными, если во всем слое жидкости имеется потенциально неустойчивая стратификация, или, по крайней мере, слой с устойчивой стратификацией достаточно тонок. Хотя если слой с неустойчивой стратификацией тонок, то длинноволновые возмущения всегда затухают и наиболее опасными становятся ячеистые возмущения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования

1. В приближении пограничного слоя получены новые точные решения задач о конвективных факелах от линейного и точечного источников тепла в жидкостях со степенной зависимостью плотности от температуры при произвольном показателе степени в уравнении состояния и избранных значениях числа Прандтля.
2. Впервые корректно решена задача о возникновении свободной конвекции в горизонтальном слое жидкости с температурной инверсией плотности при постоянном тепловом потоке на твердой нижней и свободной верхней границах. Получено аналитическое выражение для зависимости критического числа Рэлея для длинноволновой неустойчивости от безразмерной координаты точки инверсии z_i . Показано, что такая неустойчивость возможна лишь при значениях z_i , больших $5/9$ (≈ 0.56). Обнаружена и исследована область ячеистой неустойчивости, невозможная в жидкостях с линейной зависимостью плотности от температуры. Показано, что ячеистые возмущения являются наиболее опасными при z_i , меньших 0.61.
3. Численно исследована надкритическая конвекция жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры в вытянутых по горизонтали прямоугольных полостях с аспектными отношениями $L=1,2,3,4$ и 5 при заданном вертикальном тепловом потоке на свободной верхней и твердой нижней границах. Показано, что длинноволновая неустойчивость механического равновесия, характерная для таких тепловых условий на границах, в большей степени проявляется в не слишком вытянутых полостях. В полости с отношением сторон $L=5$ при увеличении числа Грасгофа вначале возникает трехвихревое движение, затем оно перестраивается в

двухвихревое, а после этого в одновихревое, либо сразу в одновихревое. Эти переходы сопровождаются гистерезисом.

5. Численно исследована надкритическая конвекция в жидкости с квадратичной зависимостью плотности от температуры в вытянутой по горизонтали прямоугольной полости с отношением сторон $L=2$ при заданном вертикальном тепловом потоке на свободной верхней и твердой нижней границах. Рассмотрено влияние положения точки инверсии на структуру надкритического конвективного течения. Показано, что в случае, когда толщины устойчиво и неустойчиво стратифицированных слоев одинаковы ($z_i = 0,5$), после потери устойчивости механического равновесия возникает конвективное движение с двумя крупными вихрями большой интенсивности, охватывающими весь неустойчиво стратифицированный слой и нижнюю часть устойчиво стратифицированного слоя и двумя меньшими и более слабыми вихрями в устойчиво стратифицированном слое. При увеличении числа Грасгофа число вихрей по горизонтали удваивается. При $z_i = 0,75$ возникающее надкритическое движение имеет простую одновихревую структуру.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы

На основе результатов исследования в дальнейшем можно рекомендовать проведение прямого численного моделирования конвективных факелов от локальных источников тепла в трехмерной постановке. При этом важно рассмотреть такие условия нагрева, когда точка инверсии будет располагаться внутри полости.

Целесообразно также исследовать возникновение и надкритические режимы проникающей тепловой конвекции в вытянутых по горизонтали полостях с заданным вертикальным тепловым потоком на границах с учетом термокапиллярного эффекта на свободной верхней границе.

Автор благодарит научного руководителя, профессора Любимову Т.П. за руководство работой, ценные указания и замечания, а также коллективы лаборатории физической гидродинамики ИМСС УрО РАН и кафедры Прикладной физики ПНИПУ за внимание к работе, поддержку и помощь на всех этапах работы над диссертацией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
3. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. Кн. 1, 2. М.: Мир, 1991. 1208 с.
4. Гершуни Г.З. Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость //Итоги науки и техники. Серия «Механика жидкости и газа». 1978. Т. 11, С. 66-154.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
6. Гетлинг А.В. Конвекция Релея-Бенара. Структура и динамика, М.: Эдиторал УРСС, 1999. 248 с.
7. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1989. 336 с.
8. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Вerezуб Н. А. и др Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
9. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 228 с.
10. Martynenko O. G., Khramtsov P. P. Free-convective heat transfer: with many photographs of flows and heat exchange. – Springer Science & Business Media, 2005. 516 p.
11. Lappa M. Thermal convection: patterns, evolution and stability. – John Wiley&Sons, 2009. 670 p.
12. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. – Clarendon Press: Oxford University Press, 1961. 652 p.

13. Джалурия Й. Естественная конвекция. Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983. 399 с.
14. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 2-е изд. 1969. 399 с.
15. Walden R.W., Ahlers G. Non-Boussinesq and penetrative convection in a cylindrical cell // *Journal of Fluid Mechanics*. 1981. Vol. 109. Pp. 89–114.
16. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.
17. Shklyayev S., Nepomnyashchy A. Longwave instabilities and patterns in fluids. – New York, NY, USA : Birkhäuser, 2017. 456 p.
18. Sparrow E.M., Goldstein R.J., Jonsson V.K. Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile // *Journal of Fluid Mechanics*. 1964. Vol. 18. Pp. 513–528.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
20. Остроумов Г. А. Свободная тепловая конвекция в условиях внутренней задачи. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1952. 284 с.
21. Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости: учеб. пособие. Пермь: Изд-во ПГУ, 2004. 101 с.
22. Бирих Р.В. и др. Линейные задачи теории гидродинамической устойчивости и численные методы их решения: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-т, 2009. 75 с.
23. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер М. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
24. Шкадов В.Я., Запрянов З.Д. Течения вязкой жидкости. М.: МГУ, 1984. 200 с.
25. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 713 с.
26. Архипкин В. С., Добролюбов С. А. Основы термодинамики морской воды. М.: Диалог-МГУ, 1998. 154 с.

27. Шлиомис М. И. Динамика жидких парамагнетиков. Пермь: Перм. ун-т, 1983. 68 с.
28. Голицын Г.С. Природные процессы и явления: волны, планеты, конвекция, климат, статистика. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004. 343 с.
29. Славинский М.П. Физико-химические свойства элементов. М.: Металлургиздат, 1952. 765 с.
30. Martinez F., Goodliffe A.M., Taylor B. Metamorphic core complex formation by density inversion and lower-crust extrusion // *Letters to Nature*. Nature, 2001. Vol. 411. Pp. 930–934.
31. Зельдович Я.Б. Предельные законы свободно-восходящих конвективных потоков // *ЖЭТФ*. 1937. Т.7. №12. С. 1463–1465.
32. Veronis G. Penetrative convection // *Astrophys.J.* 1963. Vol.137. no. 2. Pp.641–663.
33. Eklund H. Freshwater: temperature of maximum density calculated from compressibility // *Science*.1963. Vol. 142. Pp. 1457-8.
34. Goren S.L. On free convection in water at 4 C // *Chemical Engineering Science*. 1966. Vol. 21. no. 6. Pp. 515-518.
35. Gebhart B., Mollendorf J.C. A new density relation for pure and saline water // *Deep-Sea Res.* 1977. Vol. 24, no. 9. Pp.831–848.
36. Fofonoff N. P. Physical properties of seawater: A new salinity scale and equation of state for seawater // *Journal of Geophysical Research: Oceans* (1978–2012). 1985. Vol. 90. no. 2. Pp. 3332-3342.
37. Mollendorf J. C., Johnson R. S., Gebhart B. J. Several plume flows in pure and saline water at its density extreme // *Journal of Fluid Mechanics*. 1981.Vol. 113. Pp. 269–282.
38. Бекежанова В.Б. Исследование устойчивости равновесного состояния в модели конвекции с нелинейной зависимостью плотности от температуры и давления // *ПМТФ*. 2007. Т.48. № 2. С. 66–74.

39. Бекежанова, В.Б. Устойчивость неизотермических течений жидкостей в различных моделях конвекции: дисс. д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05 / Бекежанова Виктория Бахытовна. Красноярск, 2015. 268 с.
40. Gershuni G.Z., Luybimov D.V. Thermal vibrational convection. – John Wiley&Sons, 1998. 358 p.
41. Ляхов Ю.Л. Экспериментальное исследование свободной конвекции над нагретой горизонтальной проволокой // ПМТФ. 1970. №. 2. С. 169–173.
42. Зимин В. Д., Ляхов Ю. Л. Конвективный пристеночный факел // ПМТФ. 1970. №. 3. С. 159–161.
43. Степанов В.И., Шлиомис М.И. Конвективный факел в парамагнитной жидкости // Конвективные течения и гидродинамическая устойчивость. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. С. 61–67.
44. Гаврилов К.А., Демин В.А., Попов Е.А. Режимы всплытия тепловых плюмов в вертикальном слое // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. №. 3. С. 261–268.
45. Гаврилов К.А., Демин В.А., Попов Е.А. Движение и взаимодействие трехмерных плюмов в тонком вертикальном слое // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. Т. 29. №. 3. С.45–56.
46. Бабушкин И.А. и др. Развитие теплового плюма в узком вертикальном слое // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. Т. 34. №. 2. С. 41 – 50.
47. Полудницин А.Н., Шарифулин А.Н. Динамика спирального конвективного плюма в жидкости с большим числом Прандтля // Изв. РАН РФ. Мех.жидк. и газа. 2013. N 6. С. 29-32.
48. Kaminski E., Jaupart C. Laminar starting plumes in high-Prandtl-number fluids // Journal of Fluid Mechanics. 2003. Vol. 478, Pp. 287–298.
49. Yoshida M., Ogawa M. Plume heat flow in a numerical model of mantle convection with moving plates // Earth and Planetary Science Letters. 2005. Vol. 239. №. 3. Pp. 276–285.

50. Cwojdzinski S. Mantle plumes and dynamics of the Earth interior—towards a new model // *Geological Review*. 2004. Vol. 52. no. 8/2, Pp. 817–826.
51. Humphreys E., Schmandt B. Looking for mantle plumes // *Physics today*. 2011. Vol. 64. no. 8. Pp. 34–39.
52. Seki N., Fukusako S., Sugawara M.A. Criterion of Onset of Free Convection in a Horizontal Melted Water Layer with Free Surface // *J. Heat Transfer*. 1977. Vol. 99, no. 1, Pp. 92–98.
53. Алексеев В.В., Гусев А.М. Свободная конвекция в геофизических процессах. // *Успехи физических наук*. 1983. Т. 141, №4, С. 311–342.
54. Large E., Andereck C. D. Penetrative Rayleigh-Bénard convection in water near its maximum density point // *Physics of Fluids*. 2014. Vol. 26.no. 9. P. 094101.
55. Yih C.S. Laminar free convection due to a line source of heat // *Trans. Am. Geophys. Union*. 1952. Vol.33. Pp. 669–672.
56. Yih C.S. Free convection due to a point source of heat // *Journal of applied mechanics-transactions of the ASME*. – 345 e 47th st, New York, NY 10017: ASME – American Society Mechanical Engineering. 1951. Vol. 18. no. 3. Pp. 323–323.
57. Yih C.S., Wu F. Round buoyant laminar and turbulent plumes // *Physics of Fluids*. 1981. Vol. 24. no. 5. P. 794.
58. Fujii T. Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line heat source and a point heat source // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1963. Vol. 6. no. 7. Pp. 597–606.
59. Fujii T., Fujii M. Free convection of water near 4°C. Consideration of the coefficient of thermal expansion. // *Repts Res.Inst.Ind.Sci.Kyushu Univ*. 1974. no. 60. Pp.53–59.
60. Brand R.S., Lahey F.J. The heated laminar vertical jet // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. Vol.29. Pp. 305–315.

61. Pantokratoras A. A note on mixed convection of laminar plane water plumes at temperatures around the density extremum // Arch Appl Mech. 2008. Vol.78. no.1. Pp. 11–20.
62. Pantokratoras A. Laminar axisymmetric pure and saline water plumes // Heat and Mass Transfer. 2001. Vol. 37, no. 2-3. Pp. 183–189.
63. Pantokratoras A. Mixed convection in a laminar axisymmetric water plume in a vertical coflowing stream at temperatures around the density extremum // Acta Mechanica. 2003. Vol.163. Pp. 81–97.
64. Букреев В.И., Гаврилов Н.В., Чеботников А.В. Влияние немонотонной зависимости плотности воды от температуры на свободную конвекцию от линейного источника тепла // ПМТФ. 2011. Т.52, № 1. С.31–39.
65. Chapman C. J., Proctor M. R. E. Nonlinear Rayleigh–Bénard convection between poorly conducting boundaries // Journal of Fluid Mechanics. 1980. Vol. 101. no. 4. Pp. 759–782.
66. Hewitt J. M., McKenzie D. P., Weiss N. O. Large aspect ratio cells in two-dimensional thermal convection // Earth and Planetary Science Letters. 1980. Vol. 51. no. 2. Pp. 370–380.
67. Ishiwatari M., Takehiro S. I., Hayashi Y. Y. The effects of thermal conditions on the cell sizes of two-dimensional convection // Journal of Fluid Mechanics. 1994. Vol. 281. Pp. 33–50.
68. Nguyen T. H., Prud'homme M. Bifurcation of convection flows in a rectangular cavity subjected to uniform heat fluxes // International communications in heat and mass transfer. 2001. Vol. 28. no. 1. Pp. 23–30.
69. Moore D.R, Weiss N.O. Nonlinear penetrative convection // Journal of Fluid Mechanics. 1973. Vol. 61. no 3. Pp 553–581.
70. Merker G.P., Waas P., Straub J., Grigull U. Einsetzen der Konvektion in einer von unten gekühlten Wasserschicht bei Temperaturen unter 4°C. // Wärme- und Stoffübertragung. 1976. Vol. 9. no. 2. Pp.99–110.

71. Roberts A.J. An analysis of near-marginal, mildly penetrative convection with heat flux prescribed on the boundaries // *Journal of Fluid Mechanics*. 1985. Vol. 158. Pp. 71–93.
72. Hawng L.T., Lu W.F., Mollendorf J.C. The effects of the density extremum and boundary conditions on the stability of a horizontally confined water layer // *International Journal Heat Mass Transfer*. 1984. Vol. 27. no 4. Pp. 497–510.
73. Mollendorf J.C., Jann K.H. Onset of Convection in a Horizontal Layer of Cold Water // *J. Heat Transfer*. 1983. Vol. 105. no. 3. Pp. 460–465.
74. Ермоленко А.Н. Задача Рэлея—Бенара для аномальной жидкости // *ПМТФ*. 2007. Т. 48. №. 2. С. 27–38.
75. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Шихов В.М. Неустойчивость конвективного течения воды вблизи 4°C // *Изв. АН СССР МЖГ*. 1979. № 2. С. 189–192.
76. Блохин А.С., Блохина Н.С. Начало конвекции в жидкости вблизи температуры инверсии плотности. // *ДАН СССР*. 1970. Т.193, № 4. С.805–807.
77. Блохин А.С., Блохина Н.С., Макеева О.С. Самовозбуждающиеся колебания в жидкости при развитой конвекции. // *ДАН СССР*. 1973. Т.210. № I. С.75–78.
78. Блохин А.С, Блохина Н.С., Макеева О.С, Старцева З.П. Теоретическое исследование конвективного движения жидкости вблизи температуры инверсии плотности // *Водные ресурсы*. 1974. № 4. – С.154–169.
79. Ингель Л. Х. О конвективных струях, связанных с локальными источниками тепловыделяющей примеси в устойчиво стратифицированной среде // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1984. №. 1. С. 156–158.
80. Надолин К.А. Конвекция в горизонтальном слое жидкости при инверсии удельного объема // *Изв. АН СССР. Мех.жидкости и газа*. 1989. № 1. С.43–49.

81. Кузнецова Д.В., Сибгатуллин И.Н. Переходные режимы проникающей конвекции в плоском слое воды // Докл. Акад. Наук. 2011. Т. 438, №1. С. 47–50.
82. Кузнецова Д.В., Сибгатуллин И.Н. Конвекция в плоском слое с максимумом плотности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. №. 4. С. 92–99.
83. Kuznetsova D.V., Sibgatullin I.N. Transitional regimes of penetrative convection in a plane layer // Fluid Dynamics Research. 2012. Vol. 44. No. 3. P. 031410.
84. Пшеничников А.Ф. Свободная конвекция воды между вертикальными пластинами при температурах, близких к 4°C // Уч. зап. Перм. ун-та. 1971. № 248. С.169–172.
85. Weber R.O., Dold J.W. Linking Landscape Fires and Local Meteorology—A Short Review // JSME International Journal. Series B. Fluids and Thermal Engineering. 2006. Vol. 49. no. 3. Pp. 590–593.
86. Wu R.S., Cheng K.C. Maximum density effects on thermal instability induced by combined buoyancy and surface tension // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1976. Vol. 19, no. 5. Pp. 559–565.
87. Robillard L., Vasseur P., Convective response of a mass of water near 4C to a constant cooling rate applied on its boundaries. // Journal of Fluid Mechanics. 1982. Vol.118, Pp. 123–141.
88. Vasseur P., Robillard L. Transient natural convection heat transfer in a mass of water cooled through 4°C // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1980. Vol.23, no. 9, Pp. 1195–1205.
89. Родионов, С.П. Численное моделирование многомерных нестационарных неизотермических процессов в неоднородных средах : дисс. д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05/Родионов Сергей Павлович. Тюмень, 1999. 282 с.
90. Моргун, Д.А. Численное исследование влияния инверсии плотности на конвекцию холодной воды : дисс. ... к-та физ.-мат. наук : 01.02.05 / Моргун Дмитрий Алексеевич. Тюмень, 2002. 101 с.

91. Галиев И.М., Зубков П.Т. Влияние инверсии плотности воды на плоскопараллельное течение и теплоперенос в канале постоянной ширины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 1. С. 72 – 78.
92. Галиев И.М., Зубков, П.Т. Течение и теплообмен при смешанной конвекции воды в горизонтальном и наклонных каналах // Матем. Моделирование. 1999. Т.11. № 10. С. 106–115.
93. Гореликов А.В., Зубков П.Т., Моргун Д.А. Смешанная конвекция чистой воды в квадратной ячейке с движущейся верхней стенкой // Матем. Моделирование. 2000. Т. 12. № 8. С. 69–76.
94. Зубков П.Т., Кравченко В.А., Свиридов Е.М. Замерзание чистой воды в круглой трубе // Матем. Моделирование. 2001.Т. 13. № 10. С. 17–26.
95. Зубков П.Т., Калабин Е.В. Численное исследование естественной конвекции воды вблизи точки инверсии плотности при числах Грасгофа до 10^6 // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 6. С. 103–110.
96. Зубков П.Т., Калабин Е.В., Яковлев А.В. Исследование естественной конвекции пресной воды вблизи $+4^{\circ}\text{C}$ в кубической полости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 6. С. 3–10.
97. Зубков П.Т., Климин В.Т. Численное исследование естественной конвекции чистой воды вблизи точки инверсии плотности // Изв. РАН Механика жидкости и газа. 1999. №4. С.171–176.
98. Sundaravadivelu K., Kandaswamy P. Combined buoyancy and thermocapillary convection of cold water around its density maximum temperature // Acta mechanica. 2001. Vol. 147. №. 1-4. Pp. 209–218.
99. Sundaravadivelu K., Kandaswamy P. Natural convection of water in an inclined cavity with heat generation // Journal of Applied Mathematics and Computing. 2003. Vol. 12. №. 1. Pp. 281–289.
100. Cawley M.F., McBride P. Flow visualization of free convection in a vertical cylinder of water in the vicinity of the density maximum // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2004. Vol. 47, no. 6/7. Pp. 1175–1186.

101. Букреев В.И. Влияние немонотонной зависимости плотности воды от температуры на перемешивание дождевой воды в пресном водоеме // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2005. Т. 41. №. 4. С. 567–570.
102. Hossain M.A., Rees D.A.S. Natural convection flow of water near its density maximum in a rectangular enclosure having isothermal walls with heat generation // Heat and mass transfer. 2005. Vol. 41. no. 4. Pp. 367–374.
103. Букреев В.И. Влияние немонотонной зависимости плотности воды от температуры на распространение вертикальной плоской струи // ПМТФ. 2006. Т. 47. №. 2. С. 23–29.
104. Kandaswamy P., Sivasankaran S., Nithyadevi N. Buoyancy-driven convection of water near its density maximum with partially active vertical walls // International journal of heat and mass transfer. 2007. Vol. 50. no. 5. Pp. 942–948.
105. Nithyadevi N., Sivasankaran S., Kandaswamy P. Buoyancy-driven convection of water near its density maximum with time periodic partially active vertical walls // Meccanica. 2007. Vol. 42. no. 5. Pp. 503–510.
106. Ling S.C. et al. Mixed convection boundary-layer flow in a porous medium filled with water close to its maximum density // Transport in Porous Media. – 2009. Vol. 76. no. 1. Pp. 139–151.
107. Yuan X.F. et al. Numerical study on natural convection of water near its density maximum in horizontal annulus // Journal of superconductivity and novel magnetism. 2010. Vol. 23. no. 6. Pp. 1105–1109.
108. Li Y.R. et al. Natural convection of water near its density maximum between horizontal cylinders // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2011. Vol. 54. no. 11. Pp. 2550–2559.
109. Букреев В.И., Гусев А.В. Влияние аномальной зависимости плотности воды от температуры на конвекцию при боковом нагреве // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19. №. 5. С. 613–622.
110. Букреев В.И., Гусев А.В. Влияние немонотонной зависимости плотности воды от температуры на конвекцию при всестороннем нагреве // ПМТФ. 2012. Т. 53. №. 5. С. 38–46.

111. Li Y.R., Ouyang Y.Q., Hu Y.P. Pattern formation of Rayleigh-Bénard convection of cold water near its density maximum in a vertical cylindrical container // *Physical Review E*. 2012. Vol. 86. no. 4. P. 046323.
112. Corcione M., Quintino A. Penetrative convection of water in cavities cooled from below // *Computers & Fluids*. 2015. Vol. 123. Pp. 1–9.
113. Hu Y. P., Li Y. R., Wu C. M. Rayleigh-Bénard convection of cold water near its density maximum in a cubical cavity // *Physics of Fluids*. 2015. Vol. 27. no. 3. P. 034102.
114. Quintino A. et al. Heat transfer correlations for natural convection in inclined enclosures filled with water around its density-inversion point // *International Journal of Thermal Sciences*. 2017. Vol. 116. Pp. 310–319.
115. Hu Y. P. et al. Flow pattern and heat transfer in Rayleigh-Bénard convection of cold water near its density maximum in a rectangular cavity // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017. Vol. 107. Pp. 1065–1075.
116. Ma X. R., Zhang L., Li Y. R. Linear stability analysis of Rayleigh-Bénard convection of cold water near its density maximum in a vertically heated annular container // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2017. – T. 31. – №. 4. – C. 1665-1672.
117. Sagitov R.V., Sharifulin A.N. Stability of advective flow in an inclined plane fluid layer bounded by solid planes with a longitudinal temperature gradient. 1. Unstable stratification // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol.58. no. 2 Pp. 264–270.
118. Sagitov R.V., Sharifulin A.N. Stability of advective flow in an inclined plane fluid layer bounded by solid planes with a longitudinal temperature gradient 2. Stable stratification // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol.58. no. 4 Pp. 687–692.
119. Palymskiy I. B. et al. Rayleigh-Bénard convection in a gas-vapor medium at the temperature close to the critical temperature // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1382. no. 1. P. 012200.

120. Zhang L. et al. Rayleigh-Bénard convection of a gas-vapor mixture with abnormal dependence of thermal expansion coefficient on temperature // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2021. Vol. 124. P. 105245.
121. Шарифулин В.А. Длинноволновая неустойчивость равновесия жидкости вблизи температуры инверсии плотности // *Математическое моделирование в естественных науках: тез. докл. 10-й Всероссийской конференции молодых ученых*. Пермь, 2001. С. 44-45.
122. Sharifulin V.A. The heated laminar vertical jet in a liquid with power-law temperature dependence of density. // *International conference "Advanced problems in thermal convection"*, Perm, 2003. Abstract Book, P.220.
123. Sharifulin. V.A. The heated laminar vertical jet in a liquid with power-law temperature dependence of density // *Proc. International Conference "Advanced problems in thermal convection"*, Perm, 2004. Pp.67–72.
124. Lyubimov D.V., Sharifulin V.A. Onset of convection in a liquid with temperature inversion of density. *XXXVI Summer School // Conference "Advanced Problems in Mechanics" July 6 – 10, – 2008. St. Peterburg (Repino), Russia, Book of Abstracts, P. 66.*
125. Lyubimov D.V., Sharifulin V.A. Onset of convection in a liquid with temperature inversion of density. *XXXVI Summer School // Conference "Advanced Problems in Mechanics" July 6 – 10, 2008. St. Peterburg (Repino), Proceedings, Russia. Pp 431–437.*
126. Шарифулин В.А., Любимова Т.П. Структура критических возмущений в горизонтальном слое талой воды с заданным вертикальным теплотоком на границах. *XX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь. 13–16 февраля 2017 г. Тезисы докладов. Екатеринбург. 2017. С. 379.*
127. Шарифулин В.А., Любимова Т.П. Надкритическая конвекция воды со свободной границей при заданном тепловом потоке. *Сборник тезисов докладов VII Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых*

«Задачи со свободной границей: теория, эксперимент и приложения»
Красноярск: ИВМ СО РАН, 2020. 304 с.

128. Sharifulin. V.A. The laminar vertical jet in a liquid with power-law temperature dependence of density // Proceedings, International Conference “Advanced problems in thermal convection”, Perm, 2004. Pp.67–72.

129. Lyubimov D.V., Sharifulin V.A. Onset of convection in a liquid with temperature inversion of density. XXXVI Summer School // Conference “Advanced Problems in Mechanics” July 6 – 10, 2008. St. Peterburg (Repino), Russia, Proceedings, Pp 431–437.

130. Шарифулин В.А. Структура плоских конвективных факелов в жидкостях с различными степенными зависимостями плотности от температуры. Материалы конференции «Пермские гидродинамические научные чтения–2015» (на CD). Пермь. 2015. С. 56–57.

131. Шарифулин В.А., Любимова Т. П. Надкритическая конвекция воды в вытянутой горизонтальной полости при заданном тепловом потоке на границах. // Материалы всерос. Конф. «Пермские гидродинамические научные чтения» – Пермь, 2019. – С.194–196.: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/sborniki/permskie-gidrodinamicheskie-nauchnye-chteniya.pdf>.

132. Шарифулин В.А. Конвективный факел от линейного источника тепла в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 6. С. 27-30.(перевод: V. Sharifulin. Heated Vertical Jet Formed by a Linear Heat Source in Fluid with a Power-Law Temperature Dependence of the Density//Fluid Dynamics, 2011, Vol. 46, No. 6, pp. 864–867).

133. Шарифулин В.А. Осесимметричный конвективный факел в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19. № 1. С. 125–127. (перевод: V.A. Sharifulin. Axisymmetric convective torch in fluid with power dependence of density on

temperature // *Thermophysics and Aeromechanics*, 2012, Vol. 19. No. 1, Pp.163–165).

134. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Шарифулин В.А. Возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости с инверсией плотности в условиях заданного теплового потока на границах // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2012. № 4. С. 23–29. (перевод: D.V. Lyubimov, T.P. Lyubimova, V.A. Sharifulin. Onset of Convection in a Horizontal Fluid Layer in the Presence of Density Inversion under Given Heat Fluxes at Its Boundaries // *Fluid Dynamics*. 2012. Vol. 47. no. 4. Pp. 448–453.).

135. Шарифулин В. А., Любимова Т. П. Надкритические конвективные течения талой воды в открытой горизонтальной прямоугольной области с заданным вертикальным тепловым потоком // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2021. Т. 14. №. 4. С. 472–484.

136. Sharifulin V.A., Lyubimova T.P. Structure of critical perturbations in a horizontal layer of melted water with the prescribed heat flux at the boundaries // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2017. Vol.208. 012025.

137. Sharifulin V.A., Lyubimova T.P. Supercritical Convection of Water in an Elongated Cavity at a Given Vertical Heat Flux // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2021. Vol. 14. no. 2. Pp. 186–194.

138. Sharifulin V.A., Lyubimova T.P. A hysteresis of supercritical water convection in an open elongated cavity at a fixed vertical heat flux // *Microgravity Science and Technology*. 2021. Vol. 33. no. 3. Pp. 1-9.